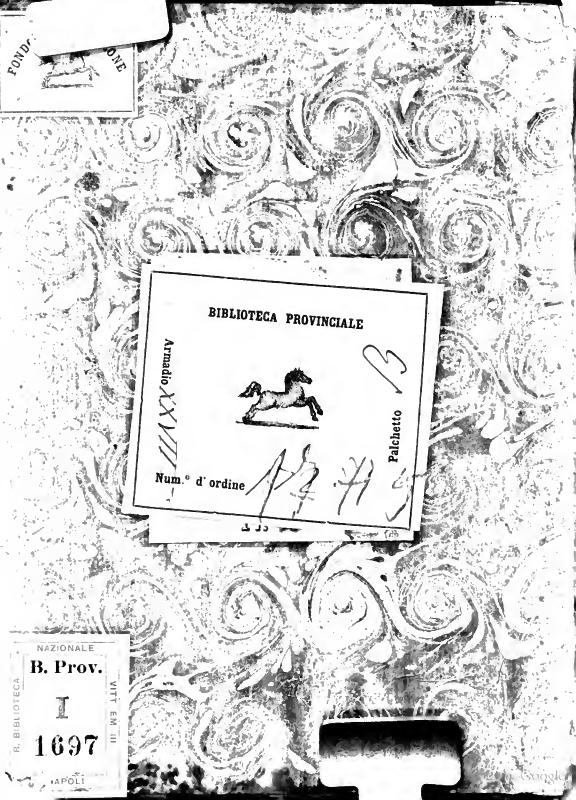
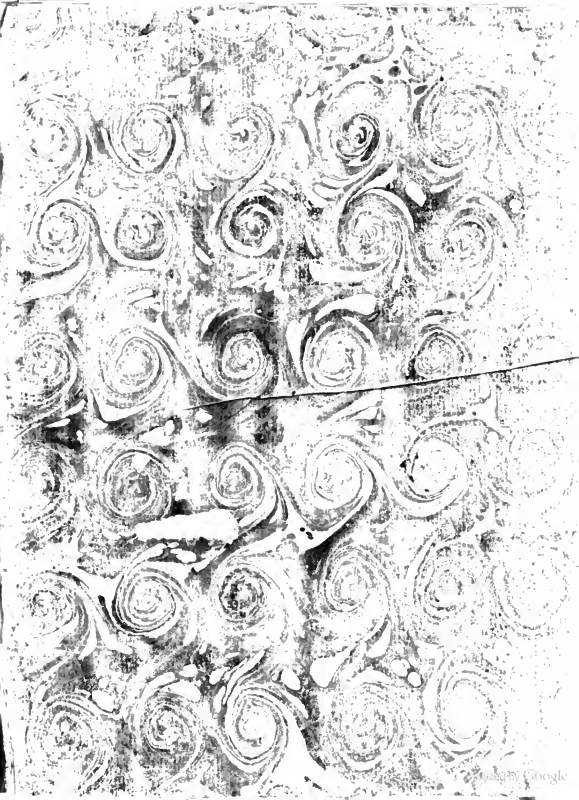




BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine
NAZIONALE
B. Prov.
I
1697
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

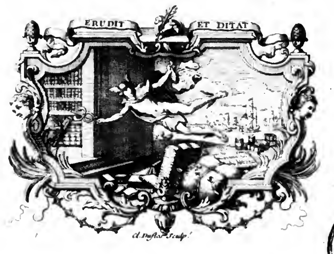


C'est a moi Ignace de Sterlich.

TRAITÉ DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

Pour servir de suite au Traité de Dynamique.

Par M. D'ALEMBERT, *de l'Académie Royale des Sciences.* &c.

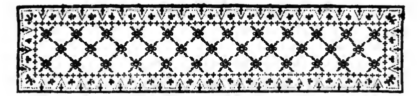


A PARIS,

Chez DAVID, l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.

MDCCXLIV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



PRÉFACE.

LES propriétés ſenſibles des Corps qui nous environnent, ont entr'elles des rapports plus ou moins marqués, dont la connoiſſance eſt preſque toujours le terme preſcrit à nos lumiéres, & doit être par conſéquent notre principal objet dans l'étude de la Phyſique. En vain l'Expérience nous inſtruira-t'elle d'un grand nombre de faits : des vérités de cette eſpéce nous ſeront preſque entiérement inutiles, ſi nous ne nous appliquons avec ſoin à en trouver la dépendance mutuelle, à ſaiſir, autant qu'il eſt poſſible, le tronc principal qui les unit, à découvrir même par leur moyen d'autres faits plus cachés, & qui ſembloient ſe dérober à nos recherches. Tel eſt le but que le Phyſicien doit ſe propoſer; telles ſont les vûes par leſquelles il peut ſe montrer vraiment Philoſophe.

Ce petit nombre de réflexions ſuffit, ce me ſemble, pour prouver combien il eſt à propos d'unir la Geométrie à la Phyſique. C'eſt par le ſecours de la Geométrie qu'on parvient à déterminer exactement la quantité d'un effet compliqué, & dépendant d'un autre effet mieux connu : cette ſcience nous eſt par conſéquent preſque toujours néceſſaire dans la comparaiſon & l'Analyſe des faits que l'Expérience nous découvre. Il faut avouer néanmoins que les différens ſujets de Phyſique ne ſont pas également ſuſceptibles de l'application de la Geométrie. Si les obſervations qui ſervent de baſe au calcul ſont en petit nombre, ſi elles ſont ſimples & lumineuſes, le Geométre ſait alors en tirer le plus grand avantage, & en déduire les connoiſſances Phyſiques les plus capables de ſatisfaire l'eſprit. Des obſervations moins parfaites ſervent ſouvent à le conduire dans ſes recherches, & à donner à ſes découvertes un nouveau degré de certitude : quelquefois même les raiſonnemens Mathematiques peuvent l'inſtruire & l'éclairer, quand l'Expérience eſt muette, ou ne parle que d'une maniére confuſe. Enfin ſi les matiéres qu'il ſe propoſe de traiter ne laiſſent aucune priſe à ſes calculs, il ſe réduit alors aux ſimples

faits dont les Obfervations l'inftruifent : incapable de fe contenter de fauffes lueurs quand la lumiére lui manque, il n'a point recours à des raisonnemens vagues & obfcurs, au défaut de démonftrations rigoureufes.

Newton, qui a été inconteftablement le plus grand Phyficien de fon fiécle, n'eft parvenu à ce degré de gloire que pour avoir conftamment fuivi une pareille Méthode. Les découvertes dont ce grand homme a enrichi la Phyfique, montrent affez qu'il eft le modéle que nous devons nous propofer, fi nous voulons faire quelques progrès dans cette fcience, & que nos fuccès dépendront de notre exactitude à ne point nous écarter des régles que nous venons d'établir.

La matiére que j'entreprends de traiter dans cet Ouvrage, eft peut-être une de celles où ces régles peuvent le mieux s'appliquer. Dès les premiers pas qu'on veut faire dans la Théorie des Fluides, on s'apperçoit aifément combien le fecours de l'Expérience eft néceffaire pour en connoître les propriétés. Mais chercherons-nous à nous éclairer dans un fujet fi compliqué par des Expériences multipliées à l'infini ? Prefque toutes celles que nous pouvons tenter fur cette matiére font fi mê-

lées de circonſtances qui nous éloignent de la préciſion, & nous dérobent, pour ainſi dire, la vérité, qu'elles ne doivent être regardées pour la plûpart, que comme un moyen de confirmer & d'appuyer nos calculs. L'Art conſiſte donc à les réduire & à les ſimplifier pour en former un véritable Corps de ſcience, & pour en déduire une Théorie certaine & lumineuſe.

C'eſt auſſi l'objet que je me ſuis propoſé en travaillant à cet Ouvrage. Dans le Traité de Dynamique dont celui-ci eſt la ſuite, j'avois pour but de réduire au plus petit nombre poſſible les Loix de l'équilibre & du mouvement des Corps ſolides : j'ai tâché de faire ici la même choſe pour les Fluides.

Il y a cependant une différence eſſentielle entre la matiére que j'ai traitée dans mon premier Ouvrage, & celle que j'entreprends de traiter dans celui-ci. La Méchanique des Corps ſolides n'étant appuyée que ſur des Principes Métaphyſiques & indépendans de l'Expérience, on peut déterminer exactement ceux de ces Principes qui doivent ſervir de fondement aux autres. La Théorie des Fluides, au contraire, doit néceſſairement avoir pour baſe l'Expérience, dont nous ne reçe-

vons même que des lumiéres fort bornées. Obligés de nous en tenir aux Principes qu'elle nous fournit, nos recherches se réduisent à savoir discerner ceux de ces Principes qui réunissent à la fois le plus de simplicité & de certitude. Les matériaux de l'édifice nous sont donnés : l'arrangement de ces matériaux & le choix particulier qu'il peut y avoir à faire entr'eux, est la seule chose dont nous soyons maîtres de disposer.

Si on connoissoit la figure & la disposition mutuelle des particules qui composent les Fluides, il ne faudroit point d'autres Principes que ceux de la Méchanique ordinaire, pour déterminer les Loix de leur équilibre & de leur mouvement. Car c'est toujours un Problême déterminé, que de trouver l'action mutuelle de plusieurs Corps qui sont unis entr'eux, & dont on connoît la figure & l'arrangement respectif. Mais comme nous ignorons la forme & la disposition des particules fluides, la détermination des Loix de leur équilibre & de leur mouvement est un Problême, qui, envisagé comme purement Geométrique, ne contient pas assez de données, & pour la solution duquel on est obligé d'avoir recours à de nouveaux Principes.

Nous jugerons aiſément du plan que nous de vons ſuivre dans cette recherche, ſi nous nou appliquons à connoître d'abord quelle différenc il doit y avoir entre les Principes généraux di mouvement des Fluides, & ceux dont nous avon fait dépendre les Loix de la Méchanique de Corps ordinaires. Ces derniers Principes, comm nous l'avons dit ailleurs, peuvent ſe réduire à trois ſavoir la force d'inertie, le mouvement compo ſé, & l'équilibre de deux maſſes égales, animée en ſens contraire de deux viteſſes virtuelles égale Nous avons donc ici deux choſes à examiner; e premier lieu, ſi ces trois Principes ſont les mê mes pour les Fluides que pour les ſolides; en ſe cond lieu, s'ils ſuffiſent à la Théorie que nous en treprenons de donner.

Les particules des Fluides étant des Corps, i n'eſt pas douteux que le principe de la force d'i nertie & celui du mouvement compoſé, ne con viennent à chacune de ces parties: il en ſeroit d même du Principe de l'équilibre, ſi on pouvoi comparer ſéparément les particules fluides entr'el les: mais nous ne pouvons comparer enſembl que des maſſes dont l'action mutuelle dépend de l'action combinée de différentes parties qui nou ſont

font inconnues : l'Expérience feule peut donc nous inftruire fur les Loix fondamentales de l'Hydroftatique.

L'équilibre des Fluides, animés par une force de direction & de quantité conftante, comme la pefanteur, eft celui qui fe préfente d'abord, & qui eft en effet le plus facile à examiner. Si on verfe une liqueur homogene dans un Tuyau compofé de deux branches cylindriques égales & verticales, unies enfemble par une branche cylindrique horizontale, la premiére chofe qu'on obferve, c'eft que la liqueur ne fauroit y être en équilibre, fans être à la même hauteur dans les deux branches. Il eft facile de conclure de-là, que le Fluide contenu dans la branche horizontale, eft preffé en fens contraires par l'action des colomnes verticales. L'Expérience apprend de plus, que fi une des branches verticales, & même, fi l'on veut, une partie de la branche horizontale eft anéantie, il faut pour retenir le Fluide, la même force qui feroit néceffaire pour foutenir un Tuyau cylindrique égal à l'une des branches verticales, & rempli de fluide à la même hauteur; & qu'en général, quelle que foit l'inclination de la branche qui joint les deux branches verticales, le Flui-

de eſt également preſſé dans le ſens de cette branche & dans le ſens vertical. Il n'en faut pas davantage pour nous convaincre, que les parties des Fluides peſans ſont preſſées & preſſent également en tout ſens. Cette propriété étant une fois découverte, on peut aiſément reconnoître qu'elle n'eſt pas bornée aux liqueurs dont les parties ſont animées par une force conſtante & de direction donnée, mais qu'elle appartient toujours aux Fluides, quelles que ſoient les forces qui agiſſent ſur leurs différentes parties. Il ſuffit pour s'en aſſurer d'enfermer une liqueur dans un vaſe de figure quelconque, & de la preſſer avec un Piſton ; car ſi l'on fait une ouverture en quelque point que ce ſoit de ce vaſe, il faudra appliquer en cet endroit une preſſion égale à celle du Piſton pour retenir la liqueur ; obſervation qui prouve inconteſtablement que la preſſion des particules ſe répand également & en tout ſens, quelle que ſoit la puiſſance qui tend à les mouvoir.

Cette propriété générale, conſtatée par une Expérience auſſi ſimple, eſt le fondement de tout ce qu'on peut démontrer ſur l'équilibre des Fluides. Néanmoins quoiqu'elle ſoit connue & miſe en uſage depuis fort longtems, il eſt aſſez ſurpre-

nant que les Loix principales de l'Hydroſtatique en ayent été ſi obſcurément déduites. Parmi une foule d'Auteurs dont la plûpart n'ont fait que copier ceux qui les avoient précedés, à peine en trouve-t'on qui expliquent avec quelque clarté, pourquoi deux liqueurs ſont en équilibre dans un Syphon; pourquoi l'eau contenue dans un vaſe qui va en s'élargiſſant de haut en bas, preſſe le fond de ce vaſe avec autant de force que ſi elle étoit contenue dans un vaſe cylindrique de même baſe & de même hauteur, quoiqu'en ſoutenant un tel vaſe, on ne porte que le poids du liquide qui y eſt contenu; pourquoi un Corps d'une peſanteur égale à celle d'un pareil volume de Fluide, s'y ſoutient en quelque endroit qu'on le place, &c. On ne viendra jamais à bout de démontrer exactement ces propoſitions, que par un calcul net & précis de toutes les forces qui coucourent à la production de l'effet qu'on veut examiner, & par la détermination exacte de la force qui en réſulte. C'eſt ce que j'ai tâché de faire d'une maniére qui ne laiſsât dans l'eſprit aucune obſcurité, en employant pour unique Principe la preſſion égale en tout ſens. J'en ai déduit juſqu'à la propriété ſi connue des Fluides, de ſe diſpoſer de maniére que

leur surface soit de niveau, propriété qui n'a peut-être pas été trop bien prouvée jusqu'ici.

Au reste, quoique l'exposition & le développement des Loix connues de l'équilibre des Fluides soit l'objet principal de la première partie de cet Ouvrage, néanmoins je me suis aussi proposé de la rendre intéressante pour les Savans, soit en y traitant des matiéres qui ne l'avoient point encore été, comme l'équilibre des Fluides dont les parties sont adhérentes entr'elles, soit en approfondissant celles qui m'ont paru le mériter davantage, comme l'équilibre des Fluides élastiques, soit enfin en proposant quelques conjectures sur différens Problêmes d'Hydrostatique, dont la solution pourra donner lieu aux recherches des Geométres.

Les Principes généraux de l'équilibre des Fluides étant connus, il s'agit à présent d'examiner l'usage que nous en devons faire, pour trouver les Loix de leur mouvement dans les vases qui les contiennent.

La Méthode générale dont nous nous sommes servis dans la Dynamique, pour déterminer le mouvement d'un systême de Corps qui agissent les uns sur les autres, est de regarder la vitesse avec

laquelle chaque Corps tend à ſe mouvoir comme compoſée de deux autres viteſſes, dont l'une eſt détruite, & l'autre ne nuit point au mouvement des Corps adjacens. Pour appliquer cette Méthode à la queſtion dont il s'agit ici, nous devons examiner d'abord quels doivent être les mouvemens des particules du Fluide, pour que ces particules ne ſe nuiſent point les unes aux autres. Or l'Expérience de concert avec la Théorie nous fait connoître que quand un Fluide s'écoule d'un vaſe, ſa ſurface ſupérieure demeure toujours ſenſiblement horizontale : d'où l'on peut conclure que la viteſſe de tous les points d'une même tranche horizontale, eſtimée ſuivant le ſens vertical, eſt la même dans tous ces points, & que cette viteſſe, qui eſt à proprement parler la viteſſe de la tranche, doit être en raiſon inverſe de la largeur de cette même tranche, pour qu'elle ne nuiſe point au mouvement des autres. Par ce Principe combiné avec le Principe général, j'ai réduit fort aiſément aux Loix de l'Hydroſtatique ordinaire les Problêmes qui ont pour objet le mouvement des Fluides, comme j'avois réduit les queſtions de Dynamique aux Loix de l'équilibre des Corps ſolides.

Il me paroît inutile de démontrer ici fort au

long le peu de ſolidité d'un Principe employé autrefois par preſque tous les Auteurs d'Hydraulique, & dont pluſieurs ſe ſervent encore aujourd'hui, pour déterminer le mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe. Selon ces Auteurs, le Fluide qui s'échappe à chaque inſtant eſt preſſé par le poids de toute la colomne de Fluide dont il eſt la baſe. Cette propoſition eſt évidemment fauſſe, lorſque le Fluide coule dans un Tuyau cylindrique entiérement ouvert & ſans aucun fond. Car la liqueur y deſcend alors comme feroit une maſſe ſolide & peſante, ſans que ſes parties, qui ſe meuvent toutes avec une égale viteſſe, exercent les unes ſur les autres aucune action. Si le Fluide ſort du Tuyau par une ouverture faite au fond, alors la partie qui s'échappe à chaque inſtant, peut à la vérité ſouffrir quelque preſſion par l'action oblique & latérale de la colomne qui appuye ſur le fond; mais comment prouvera-t'on que cette preſſion eſt égale préciſément au poids de la colomne de Fluide qui auroit l'ouverture du fond pour baſe?

Je ne m'arrêterai point non plus à faire voir ici dans un grand détail, avec quelle facilité on déduit de mes Principes la ſolution de pluſieurs

Problêmes fort difficiles qui ont rapport à la matiére que je traite, comme la pression des Fluides contre les vaisseaux dans lesquels ils coulent, le mouvement d'un Fluide qui s'échappe d'un vase mobile & entraîné par un poids &c. Ces différens Problêmes qui n'avoient été résolus jusqu'à présent que d'une maniére indirecte, ou pour quelques cas particuliers seulement, sont des Corollaires fort simples de ma Méthode. En effet, pour déterminer la pression mutuelle des particules du Fluide, il suffit d'observer que si les tranches se pressent les unes les autres, c'est parce que la figure & la forme du vase les empêche de conserver le mouvement qu'elles auroient, si chacune d'elles étoit isolée. Il faut donc par notre Principe, regarder ce mouvement comme composé de celui qu'elles ont réellement, & d'un autre qui est détruit. Or c'est en vertu de ce dernier mouvement détruit qu'elles se pressent mutuellement, avec une force qui réagit contre les parois du vase. La quantité de cette force est donc facile à déterminer par les Loix de l'Hydrostatique, & ne peut manquer d'être connue dès qu'on a trouvé la vitesse du Fluide à chaque instant. Il n'y a pas plus de difficulté à déterminer le mouvement des Fluides dans des vases mobiles.

Mais un des plus grands avantages qu'on tire de notre Théorie, c'eſt de pouvoir démontrer que la fameuſe Loi de Méchanique, appellée *la conſervation des forces vives*, a lieu dans le mouvement des Fluides comme dans celui des Corps ſolides.

Ce Principe, reconnu aujourd'hui pour vrai par tous les Méchaniciens, & que j'ai expliqué fort au long dans mon premier Ouvrage, eſt celui dont M. *Daniel Bernoulli* a déduit les Loix du mouvement des Fluides dans ſon Hydrodynamique. Dès l'année 1727. le même Auteur avoit donné un eſſai de ſa nouvelle Théorie : c'eſt le ſujet d'un très-beau Mémoire imprimé dans le *To. II. de l'Académie de Petersbourg*. M. *Daniel Bernoulli* n'apporte dans ce Mémoire d'autre preuve de la conſervation des forces vives dans les Fluides, ſinon qu'on doit regarder un Fluide comme un amas de petits Corpuſcules élaſtiques qui ſe preſſent les uns les autres, & que la conſervation des forces vives a lieu, de l'aveu de tout le monde, dans le choc d'un ſyſtême de Corps de cette eſpéce. Il me ſemble qu'une pareille preuve ne doit pas être regardée comme d'une grande force : auſſi l'Auteur paroît-il ne l'avoir donnée que comme

comme une induction, & ne l'a même rappellée en aucune maniére dans son grand Ouvrage sur les Fluides, qui n'a vû le jour que plusieurs années après. Il m'a donc paru qu'il étoit nécessaire de prouver d'une maniére plus claire & plus exacte le Principe dont il s'agit appliqué aux Fluides. J'avois déja essayé de le démontrer en peu de mots à la fin de mon Traité de Dynamique ; mais on en trouvera ici une preuve plus étendue & plus détaillée.

Au reste, quoique M. *Daniel Bernoulli* n'ait pas démontré le Principe général qui sert de fondement à son Ouvrage, on n'en doit pas moins convenir que sa Théorie est très-élégante, & qu'il est constamment le premier qui ait entrepris de déterminer le mouvement des Fluides par des Méthodes sûres & non arbitraires. Aussi suis-je obligé d'avouer ici, que les résultats de mes solutions s'accordent presque toujours avec les siens. Il en faut néanmoins excepter un petit nombre de Problêmes. Ce sont ceux où cet habile Geométre a employé le Principe de la conservation des forces vives, pour déterminer le mouvement d'un Fluide dans lequel il y a quelque partie dont la vitesse diminue ou augmente en un instant d'une

quantité finie. Tel est entr'autres le Problême où il s'agit de trouver la vitesse d'un Fluide sortant d'un vase qu'on entretient toujours plein à la même hauteur, en supposant que la petite lame de Fluide qu'on ajoute à chaque instant à la surface, reçoive son mouvement du Fluide inférieur, par lequel elle est entraînée. Il est évident que dans une pareille hypothese, cette lame de Fluide qui n'avoit aucune vitesse dans l'instant qu'on l'a appliquée sur la surface, reçoit dans l'instant suivant une vitesse finie égale à celle de la surface qui l'entraîne. Or sans vouloir examiner si cette hypothese est conforme à la nature, ou non, il est toujours * certain qu'on ne doit point employer le Principe de la conservation des forces vives pour trouver le mouvement d'un systême de Corps, lorsqu'on suppose qu'il y a dans ce systême quelque Corps dont la vitesse varie en un instant d'une quantité finie. C'est pour cette raison que dans ce Problême & dans quelques autres, mes solutions sont différentes de celles de M. *Daniel Bernoulli*.

Un autre reproche qu'on pourroit faire à cet illustre Auteur, c'est qu'il semble avoir supposé que quand un Fluide sort d'un vase par une

* Voyez le *Traité de Dynamique*, art. 155 & 156.

ouverture faite au fond, la petite masse qui s'échappe à chaque instant, passe tout-d'un-coup de la vitesse qu'elle a, lorsqu'elle est encore renfermée dans le vase, à une autre vitesse qui en différe d'une quantité finie. Il est vrai que cette supposition, pourvû qu'on ne la prenne pas à la rigueur, n'empêchera point, comme je l'ai fait voir, que les solutions de M. *Daniel Bernoulli* ne soient exactes pour la plûpart, & qu'il n'ait pû les déduire du Principe des forces vives. Mais c'est peut-être aussi pour avoir donné à cette supposition trop d'étendue & de réalité, que ce même Auteur s'est servi des forces vives en d'autres cas où il n'auroit pas dû en faire usage.

L'insuffisance du Principe des forces vives pour conduire à une Théorie lumineuse sur le mouvement des Fluides, paroît avoir été un des principaux motifs, qui ont engagé le célébre M. *Jean Bernoulli* à composer sa nouvelle Hydraulique, imprimée en 1743. dans le Recueil de ses œuvres. J'ai donné dans un article particulier le précis de la Méthode de ce grand Geométre, & des difficultés qu'il m'a paru qu'on lui pouvoit opposer. On verra, si je ne me trompe, par l'exposé que j'en ai fait, qu'il reste encore dans la

Théorie de M. *Bernoulli* de l'incertain & de l'arbitraire. Son principe général se déduit d'ailleurs si facilement de celui des forces vives, qu'il paroît n'être autre chose que ce dernier Principe présenté sous une autre forme. Aussi cherche-t'il à confirmer sa Méthode par des solutions indirectes appuyées sur la Loi de la conservation des forces vives.

Longtems avant Messieurs *Bernoulli*, l'Illustre *Newton* avoit donné dans ses *Principes* un leger essai sur la matiére dont il s'agit. Tout le monde connoît sa fameuse Cataracte. Mais quelque ingénieuse qu'en puisse être la formation, on ne peut s'empêcher de reconnoître qu'elle est fondée sur un grand nombre de suppositions purement gratuites, démenties presque toutes par la Théorie & par l'Expérience. L'application & l'usage de mes Principes, & les objections de M. *Bernoulli* contre cette même Cataracte, * suffiront au Lecteur pour juger de la vérité de ce que j'avance ici.

J'ose me flatter, si une aveugle prévention pour mon propre Ouvrage ne me séduit point, qu'on conviendra sans peine de la simplicité & de la fécondité des Principes que j'ai substitués aux Mé-

* Art. LX. de son *Hydraulique*.

thodes des Geométres que je viens de citer. Mon deſſein n'eſt point ici de déprimer le travail de ces grands Hommes : mais les Sciences telles que celle-ci, ſont de nature à ſe perfectionner toujours de plus en plus : aidés des lumiéres que les Savans qui nous ont précedé, ont répandu ſur des matiéres obſcures, nous ſommes quelquefois aſſez heureux, pour avancer plus loin qu'ils n'ont fait dans les routes qu'eux-mêmes nous ont tracées, & ſi nous oſons les combattre, c'eſt avec des armes que nous tenons d'eux.

Je ne prétends pas cependant avoir ſurmonté toutes les difficultés qu'il pouvoit y avoir à vaincre dans une matiére auſſi délicate. Il y a des cas où les mouvemens des particules ſont ſi ſubits & ſi peu réguliers, qu'ils ne laiſſent, pour ainſi dire, aucune priſe au calcul, & que le Problême demeure indéterminé. Mais il me ſemble que ces difficultés naiſſent plutôt du fond du ſujet & du peu de connoiſſances que nous avons ſur les Fluides, que de la nature de ma Méthode.

Les Principes dont je me ſuis ſervi pour déterminer le mouvement des Fluides non élaſtiques, s'appliquent avec une extrême facilité aux Loix du mouvement des Fluides élaſtiques : j'ai

donc crû devoir m'étendre particuliérement ſur ce ſujet qu'on peut regarder comme nouveau, puiſque M. *Daniel Bernoulli* dans ſon Hydrodynamique, s'eſt contenté d'examiner en peu de mots & par une Méthode indirecte le mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe par une ſeule ouverture fort petite, en ſuppoſant la chaleur conſtante, & l'élaſticité proportionnelle à la denſité.

Le mouvement d'un Fluide élaſtique différe de celui d'un Fluide ordinaire, principalement par la Loi des viteſſes de ſes différentes couches. Ainſi, par exemple, lorſqu'un Fluide non élaſtique coule dans un Tuyau cylindrique, comme il ne change point de volume, ſes différentes tranches ont toutes la même viteſſe. Il n'en eſt pas de même d'un Fluide élaſtique. Car s'il ne ſe dilate que d'un côté, les tranches inférieures ſe meuvent plus vîte que les ſupérieures, à peu près comme il arrive à un reſſort attaché à un point fixe, & dont les parties parcourent en ſe dilatant d'autant moins d'eſpace qu'elles ſont plus proches de ce point. Telle eſt la différence principale qu'il doit y avoir dans la Théorie du mouvement des Fluides élaſtiques, & de ceux qui ne le ſont pas. La Méthode pour trouver les Loix de leur mouvement, & les Prin-

cipes qu'on employe pour cela, sont d'ailleurs entiérement semblables.

C'est aussi en suivant cette même Méthode, que j'ai examiné le mouvement des Fluides dans des Tuyaux fléxibles, matiére entiérement nouvelle, mais dont j'ai été obligé d'exposer simplement les Principes, en les appliquant seulement à quelques cas particuliers, à cause de l'extrême complication de calculs, où une recherche plus étendue n'auroit pas manqué de me jetter, ce qui n'auroit servi qu'à remplir inutilement plusieurs pages de caractéres Algébriques, sans instruire davantage le Lecteur.

Je suis au reste bien éloigné de penser, que la Théorie que j'ai établie sur le mouvement des Fluides dans des Tuyaux fléxibles, puisse nous conduire à la connoissance de la Méchanique du Corps humain, de la vitesse du sang, de son action sur les vaisseaux dans lesquels il circule &c. Il faudroit pour réussir dans une telle recherche, savoir exactement jusqu'à quel point les vaisseaux peuvent se dilater, connoître parfaitement leur figure, leur élasticité plus ou moins grande, leurs différentes anastomoses, le nombre, la force & la disposition de leurs valvules, le degré de chaleur & de

tenacité du ſang, les forces motrices qui le pouſſent &c. Encore quand chacune de ces choſes ſeroit parfaitement connue, la grande multitude d'élémens qui entreroient dans une pareille Théorie, nous conduiroit vraiſemblablement à des calculs impraticables. C'eſt en effet ici un des cas les plus compoſés d'un Problême dont le cas le plus ſimple eſt fort difficile à réſoudre. Lorſque les effets de la nature ſont trop compliqués & trop peu connus pour pouvoir être ſoumis à nos calculs, l'Expérience, comme nous l'avons déja dit, eſt le ſeul guide qui nous reſte : nous ne pouvons nous appuyer que ſur des inductions déduites d'un grand nombre de faits. Voilà le plan que nous devons ſuivre dans l'examen d'une Machine auſſi compoſée que le Corps humain. Il n'appartient qu'à des Phyſiciens oiſifs de s'imaginer qu'à force d'Algébre & d'hypotheſes, ils viendront à bout d'en dévoiler les reſſorts, & de réduire en calcul l'art de guérir les hommes.

Après avoir déterminé par les Méthodes les plus exactes qu'il nous a été poſſible les Loix du mouvement des Fluides, il ne nous reſte plus qu'à examiner leur action ſur les Corps ſolides qui y ſont plongés & qui s'y meuvent. Rien n'eſt plus difficile

ficile que de donner là-dessus des regles précises & exactes : car non-seulement on ignore la figure des parties du Fluide & leur disposition par rapport au Corps qui les frappe, on ignore aussi jusqu'à quelle distance le Corps agit sur le Fluide, & quelle route les particules prennent, lorsqu'elles ont été mises en mouvement par ce Corps. Tout ce que l'Expérience nous apprend, c'est que les particules du Fluide après avoir été poussées, se replient ensuite derriére le Corps pour venir occuper l'espace qu'il laisse vuide par derriére.

Voici donc le plan que j'ai cru devoir suivre dans une recherche de la nature de celle-ci. J'ai déterminé d'abord le mouvement qu'un Corps solide doit communiquer à une infinité de petites boules dont on suppose qu'il est couvert : j'ai fait voir ensuite que le mouvement perdu par ce Corps dans un instant donné étoit le même, soit qu'il choquât à la fois un certain nombre de couches de ces petites boules, soit qu'il ne les choquât que successivement ; que de plus, la résistance seroit la même quand les petits Corpuscules seroient de toute autre figure que la sphérique, & disposés de quelque maniére que ce fût, pourvû que la masse totale de ces petits Corps contenus dans un espace,

donné, fût ſuppoſée la même que quand ils étoient de petites boules. Par ce moyen je ſuis arrivé à des formules générales ſur la réſiſtance, dans leſquelles il n'entre que le rapport des denſités du Fluide & du Corps qui s'y meut. J'ai déterminé auſſi par une Méthode ſemblable, la réſiſtance qu'un Corps ſolide éprouve, ſoit dans un Fluide élaſtique, ſoit dans un Fluide dont les parties ſont adhérentes entr'elles.

Enfin pour ne rien omettre de ce qui pouvoit rendre ma Théorie plus intéreſſante & plus générale, j'ai cru devoir expoſer auſſi la Méthode de M. *Newton*. Cette Méthode conſiſte, comme l'on ſait, à ſuppoſer qu'au lieu que le Corps vient frapper le Fluide, ce ſoit au contraire le Fluide qui frappe le Corps, & à déterminer par ce moyen le rapport de l'action d'un Fluide ſur une ſurface courbe, à ſon action ſur une ſurface plane. La difficulté principale eſt d'évaluer exactement l'action d'un Fluide contre un plan. Auſſi les plus grands Geométres ne ſont-ils point d'accord là-deſſus. Cette action vient en grande partie de l'accélération du Fluide, qui, obligé de ſe détourner à la rencontre du plan, & de couler dans un Canal plus étroit, doit néceſſairement y couler plus

vîte, & par ce moyen presser le plan. Mais on ignore jusqu'à quelle distance le Fluide peut s'accélérer des deux côtés du plan, & par conséquent la quantité exacte de la pression qu'il exerce. C'est là, ce me semble, le nœud principal de la question, & la cause du partage qu'il y a entre les Geométres touchant la valeur absolue de la résistance.

Voilà ce que j'avois à dire ici sur les Principes généraux de la Méchanique des Fluides, qui sont le sujet de la plus grande partie de ce Traité. Le reste de l'Ouvrage est destiné à l'examen de différens points de la Théorie des Fluides, qui n'ont peut-être pas été approfondis jusqu'ici avec assez de soin. Telle est en premier lieu la Théorie de la Réfraction. Tout le monde sait qu'un Corps solide qui passe d'un Fluide dans un autre, ne continue pas son chemin en ligne droite, mais qu'il s'écarte de sa premiére route pour décrire une autre ligne plus ou moins inclinée que la premiére à la surface du nouveau milieu dans lequel il est entré. C'est ce qu'on remarque en particulier dans les rayons de lumiére, qui se brisent en passant de l'air dans le verre ou dans tel autre Corps transparent que ce soit. Ce Phenomene, connu

d'abord par l'Expérience, a beaucoup exercé la ſagacité des Philoſophes. Il paroiſſoit naturel de faire dépendre la réfraction de la lumiére des mêmes Principes, que la réfraction des Corps ſolides qui traverſent un Fluide. C'eſt auſſi le parti qu'avoit pris *Deſcartes*, ſuivi en cela par un grand nombre de Phyſiciens. Quelques raiſonnemens vagues & dénués de préciſion que *Deſcartes* avoit faits, pour prouver que les principaux Phenomenes de la réfraction de la lumiére s'expliquoient parfaitement dans ſes Principes, ont paru, & paroiſſent encore à bien des Philoſophes des démonſtrations exactes & complettes. Une choſe néanmoins a toujours embarraſſé les Carteſiens, c'eſt qu'il réſulte de leur Théorie même, que les milieux qui réſiſtent le moins à la lumiére, ſont ceux où elle s'approche de la perpendiculaire, & qu'ainſi il faut ſuppoſer qu'elle trouve plus de réſiſtance dans l'air que dans l'eau. Quelque révoltante que puiſſe paroître cette ſuppoſition, & les conſéquences qu'elle entraîne après elle, les Carteſiens cependant s'y ſont toujours tenus retranchés comme dans un aſyle où il étoit difficile de les forcer : car la nature des Corpuſcules lumineux nous étant entiérement inconnue, il n'eſt pas

aiſé de démontrer que l'eau leur réſiſte plus que l'air. J'ai donc cru devoir tourner mes vûes d'un autre côté, en m'appliquant à examiner à fond les Loix de la réfraction des Corps ſolides, non par des Principes incertains & par des raiſonnemens haſardés, mais par une Méthode exacte & des calculs précis. Les propoſitions où ma Méthode m'a conduit, ſont pour la plûpart ſi paradoxes, ſi ſinguliéres, & ſi éloignées de tout ce qu'on avoit cru juſqu'ici, qu'on ſentira aiſément combien cette matiére étoit nouvelle, quoique maniée par tant d'Auteurs differens. Il réſulte de mes démonſtrations, qu'aucune des Loix qu'on obſerve dans la réfraction de la lumiére, ne doit avoir lieu dans celle des Corps ſolides, & qu'ainſi c'eſt mal-à-propos qu'on a fait dépendre l'une & l'autre réfraction des mêmes Principes.

Pour donner à ma Théorie un nouveau degré de force, il m'a paru néceſſaire d'examiner les Principes généraux ſur leſquels la plûpart des Phyſiciens ont cru devoir appuyer les Loix de la réfraction des Corps ſolides. J'ai choiſi la Théorie de M. de *Mairan*, qui eſt, à proprement parler, une extenſion de celle de *Deſcartes*. L'intérêt de la vérité m'a obligé d'expoſer fort au long les rai-

fons que j'ai eûes pour établir fur la réfraction des propofitions directement contraires à celles de cet illuftre Académicien : j'efpere qu'il ne me défapprouvera pas d'être entré là-deffus dans un affez grand détail, s'il peut en réfulter quelque inftruction pour mes Lecteurs.

Le mouvement des Corps de figure quelconque dans des milieux de denfité uniforme ou variable, eft une branche de la Réfraction. Je me fuis étendu tant plus volontiers fur cette matiére, qu'il m'a paru qu'elle fourniffoit un vafte champ à la Geométrie. Dans le Chapitre où je l'ai traitée, on trouvera entr'autres chofes la Méthode pour conftruire dans plufieurs cas inconnus jufqu'ici, les Trajectoires dans les milieux réfiftans, & des obfervations nouvelles fur la réfraction des Corps dans des milieux d'une denfité non uniforme, fur le choc des Fluides contre les moulins à eau & à vent, & fur le folide de la moindre réfiftance.

Le dernier Chapitre de cet Ouvrage, contient des recherches fur les Fluides qui fe meuvent en Tourbillon, & fur le mouvement des Corps qui y font plongés. Mon deffein dans ce Chapitre n'a été, ni de foutenir une caufe auffi défefperée

que celle des Tourbillons de *Descartes*, ni de lui porter de nouveaux coups. Je me suis seulement proposé de donner au Public mes recherches sur un sujet qui est par lui-même assez curieux, indépendamment de l'application qu'on voudroit en faire au mouvement des Planetes. J'ai tâché de ne renfermer dans ma Théorie que des propositions nouvelles & intéressantes pour les Geométres. Si je suis entré dans quelque détail sur les Tourbillons Cartesiens, ç'a été pour éclaircir quelques articles singuliers & importans qui ont été jusqu'ici peu approfondis, & à la discussion desquels la nature de mon sujet m'a conduit. Un plus long examen du systême de *Descartes*, n'auroit rien de nouveau. D'ailleurs, ce systême n'a presque plus aujourd'hui de sectateurs parmi les Physiciens : il est vrai que dans des circonstances singuliéres, de très-habiles Geométres se sont déclarés partisans de l'hypothese de *Descartes* : mais ils nous ont laissé tout lieu de croire par les raisons dont ils l'ont appuyée, que ce n'étoit pas sérieusement qu'ils en prenoient la défense. A l'égard de ceux que la prévention ou le défaut de lumiéres attache encore aux Tourbillons, en vain chercherions-nous à les convaincre. Ce n'est point

par des démonſtrations qu'on peut eſperer de déraciner des préjugés auſſi invéterés, & de détruire une opinion à laquelle même pluſieurs perſonnes croyent fauſſement que l'honneur de la nation eſt intéreſſé.



TABLE

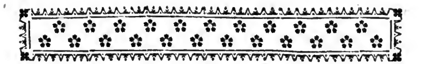


TABLE DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

LIVRE PREMIER.

De l'équilibre des Fluides, tant entr'eux, qu'avec des Corps solides.

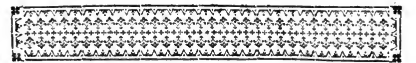
LIVRE SECOND.

Du mouvement des Fluides renfermés dans des vases.

LIVRE TROISIE'ME.

De la résistance des Fluides au mouvement des Corps.

Fin de la Table des Titres.



TRAITÉ DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

LIVRE PREMIER.

De l'équilibre des Fluides, tant entr'eux, qu'avec des Corps solides.

CHAPITRE PREMIER.

Loix générales de l'équilibre dans un Fluide dont les parties sont animées par des Pesanteurs quelconques.

THEORÊME I.

1. *SI un vase de figure quelconque* ABC (Fig. 1), *est entiérement rempli par un Fluide, & qu'ayant fait à ce vase un petit trou* A, *l'on presse en cet endroit la surface du Fluide, la pression se répandra également en tout sens & dans toutes les parties du Fluide, de*

manière que tous les points E, D, &c. *du vase seront pressés suivant les lignes* DF, EG, *perpendiculaires à la surface* ABC, *avec une force égale à la force qui presse en* A.

Cette proposition doit être regardée comme un Principe d'Expérience, dont tout le monde convient : & la proprieté des Fluides dont il s'agit ici, est ce que nous connoissons de plus certain sur leur nature.

Remarque.

2. J'ai cru ne devoir point donner d'autre définition des Fluides, que celle qui est, pour ainsi dire, renfermée dans l'énoncé de ce Theorême. Il me semble que nous ne connoissons pas assez la nature des Fluides, pour en pouvoir donner une notion précise : aussi les définitions que nous en avons eu jusqu'ici, ne paroissent pas pouvoir nous conduire à la démonstration de la proprieté des Fluides que nous venons de rapporter : la meilleure & la plus plausible, que je sache, est celle de M. *Newton* qui définit le Fluide, * *un corps dont les parties cedent à une force quelconque qu'on leur imprime, & se meuvent facilement entr'elles en cedant à cette force.* Mais il me semble qu'on pourroit n'être pas entiérement satisfait de l'usage que M. *Newton* fait ensuite de cette définition, pour prouver que si un Fluide est enfermé dans un vase quelconque, & qu'il y soit comprimé de toutes parts, les parties de ce Fluide sont également pressées en tout sens,

* Princip. l. 2. Sect. V.

abſtraction faite de la peſanteur & de toutes les autres forces accélératrices ou centripetes.

M. *Newton* fait voir d'abord, que ſi le vaſe eſt ſphérique, & que le Fluide ſoit comprimé également de tous côtés à ſa ſurface, aucune des parties ne doit ſe mouvoir. Il ſe propoſe enſuite de prouver qu'une partie ſphérique quelconque du Fluide, qui n'a pas le même centre que le vaſe, eſt preſſée également en tous ſes points; voici la raiſon qu'il en apporte : ſi cette partie, dit-il, n'eſt pas également preſſée en tous ſes points, qu'on augmente la preſſion dans l'endroit où elle eſt moindre, juſqu'à ce que la preſſion ſoit égale partout, & alors toutes les parties doivent reſter en équilibre; mais, par l'hypotheſe, elles étoient en équilibre avant la nouvelle preſſion ajoutée, & l'addition de cette nouvelle preſſion doit les mouvoir, par la définition du Fluide. Elles ſeroient donc tout à la fois en repos & en mouvement, ce qui répugne. Donc &c.

Voici ce qu'on peut, ce me ſemble, objecter à ce raiſonnement. Si la preſſion n'agiſſoit pas ſeulement à la ſurface, comme on le ſuppoſe ici, mais que les particules du Fluide fuſſent toutes animées d'une peſanteur qui les fit tendre vers le centre du vaſe, & qui fut la même à la même diſtance, aſſurément le Fluide ſeroit en équilibre, & néanmoins une partie ſphérique du Fluide, autre que celles qui ont le même centre que le vaſe, ne ſeroit pas également preſſée en tous ſes points. M. *Newton* ſemble même en convenir tacitement, puiſque

dans l'énoncé de sa proposition il fait abstraction de toutes forces centripetes. Dans le cas où toutes les particules sont supposées peser vers le centre, une partie sphérique quelconque reste en équilibre, non parce que tous les points de la surface de cette partie sont pressés également, mais parce que chaque point en particulier est pressé en sens contraires par deux forces égales, comme on le verra dans la suite. Il me semble cependant, que si on vouloit appliquer ici la preuve que nous venons de rapporter de M. *Newton*, on prouveroit que cette partie sphérique est pressée également dans tous ses points. Il y a donc apparemment quelque obscurité dans la preuve de M. *Newton*, puisqu'il paroît qu'on pourroit en déduire une proposition fausse.

COROLLAIRE I.

3. Si outre le trou *A* on fait encore une petite ouverture en *D*, la liqueur pressée en *A* doit nécessairement s'échapper par *D*.

COROLLAIRE II.

4. Si le vase *ABC* a des parois flexibles, & que les parties du Fluide ne soient animées par aucune autre force, que par celle qui est appliquée en *A*, le vase *ABC* prendra nécessairement une forme circulaire. Car on sçait que ce vase *ABC* doit prendre une telle courbure, que le rayon de la développée en un point quelconque, soit toujours en raison inverse de la pression per-

pendiculaire en ce point. Donc puisque la pression est égale dans tous les points, il s'ensuit que les rayons de la développée doivent tous être égaux. Donc &c.

COROLLAIRE III.

5. Nous avons vu dans le Cor. I. que la liqueur s'échappera par *D*, si on fait en ce point une ouverture. Le seul moyen d'empêcher qu'elle ne s'échappe, c'est d'appliquer en *D* une pression égale à celle qui est en *A*. Il en seroit de même s'il y avoit une autre ouverture en un point quelconque *E*. Donc en général, quel que soit le nombre des ouvertures faites au vase, il est nécessaire pour que le Fluide reste en équilibre, que les parties de la surface du Fluide contigues à toutes ces ouvertures, soient également pressées.

COROLLAIRE IV.

6. Supposant que toutes les parties du Fluide contigues au vase *ABC* soient animées par des forces dirigées suivant les Tangentes de la Courbe *ABC*, je dis que si on fait à ce vase une petite ouverture en un point quelconque *A*, la liqueur s'échappera par cet endroit.

Car 1°. si la somme de ces forces tangentielles n'est pas nulle, c'est-à-dire, si les forces dans un sens ne détruisent pas les forces dans l'autre, il y aura, supposant le vase entiérement fermé, un courant perpétuel de *D* vers *E*, ou de *E* vers *D*, duquel il résultera (*Art.* 1.) une pression contre les parois du vase; d'où il s'ensuit,

que ſi on fait une ouverture en A, la liqueur s'échappera néceſſairement par-là. 2°. Si les forces de part & d'autre ſe détruiſent, la preſſion de chaque particule réagit contre le vaſe ; d'où il eſt clair que le vaſe étant ouvert en A, la particule qui répond au trou A doit s'échapper.

COROLLAIRE V.

7. Tout le reſte demeurant le même que dans le Cor. précedent ; je dis, que ſi les particules du Fluide, outre leurs forces tangentielles, ſont animées par des forces perpendiculaires à la ſurface du Fluide, la liqueur ne laiſſera pas de s'échapper toujours par A.

Car, ou les particules du Fluide peuvent être en équilibre en vertu des ſeules forces perpendiculaires, & en ce cas, on peut faire abſtraction de ces forces, & n'avoir égard qu'à l'effet des forces tangentielles, qui ſera par conſéquent le même que dans le Corol. précedent, puiſque les parois du vaſe ſeront toujours preſſés par l'action des forces tangentielles: ou bien le Fluide ne ſera pas en équilibre en vertu des ſeules forces perpendiculaires, & en ce cas, les parois du vaſe ſeront preſſés par l'action des forces perpendiculaires : or ils le ſont auſſi par l'action des forces tangentielles. Donc &c.

COROLLAIRE VI.

8. Si un Fluide eſt contenu dans un vaſe ABC fermé de tous côtés, & qu'une particule quelconque H de

l'intérieur de ce Fluide soit pressée suivant une direction quelconque, la pression se distribuera également en tout sens & à toutes les parties du Fluide. Car on peut regarder la particule *H* comme étant à la surface d'un Fluide qui seroit renfermé dans un vase quelconque *HNK*. Or, cela posé, tous les points de *HNK* seroient également pressés (*art.* 1.) & cette pression se distribueroit également en tout sens à tous les points renfermés entre les deux couches *HNK*, *ABC*. Donc &c.

COROL. VII.

9. Donc un Fluide ne peut être en équilibre, à moins que chacune de ses parties ne soit pressée également de tous les côtés.

THEORÊME II.

10. *Si une liqueur dont les parties sont animées par des forces quelconques, est en équilibre, la direction de la pression doit être perpendiculaire à tous les points de sa surface.*

Car la liqueur (*hyp.*) étant en équilibre, si on l'imagine renfermée dans un vase de tous côtés, & qu'on fasse à ce vase tant d'ouvertures qu'on voudra, il est clair qu'elle restera encore en équilibre. Or si les particules de la surface du Fluide étoient animées par des forces tangentielles outre leurs forces perpendiculaires, le Fluide renfermé en cet état dans le vase, devroit (*art.* 7.) s'échapper par les ouvertures faites au vase. Donc il n'y seroit point en équilibre. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

11. Donc une liqueur quelconque dont les particules ſont animées par la peſanteur naturelle qui anime tous les Corps terreſtres, doit toujours ſe mettre de niveau, c'eſt-à-dire ſe diſpoſer de maniére que ſa ſurface ſoit paralléle à l'horizon. C'eſt auſſi ce que l'Expérience verifie.

COROL. II.

12. Donc ſi une liqueur eſt compoſée de parties qui peſent toutes vers un même centre, la ſurface de cette liqueur doit être circulaire ou ſphérique, pour que le Fluide ſoit en équilibre.

SCOLIE.

13. On prouve ordinairement de deux maniéres la propoſition que nous venons de démontrer.

La premiére conſiſte à faire voir, que ſi la preſſion n'étoit pas dirigée perpendiculairement à la ſurface, on pourroit la décompoſer en deux autres; l'une, perpendiculaire à la ſurface, l'autre, tangente à cette même ſurface, & ſuivant laquelle le Fluide ne manqueroit pas de s'écouler comme ſur un plan incliné, ce qui romproit l'équilibre.

Cette démonſtration, qui d'abord paroît ſuffiſante, n'eſt peut-être pas aſſez rigoureuſe. En effet, ſuppoſons pour un moment qu'une liqueur peſante *DGBC* (Figure 2) ſoit contenue dans un vaſe incliné *ABCH*. Dira-t'on que cette

cette liqueur ne peut se soutenir dans cet état, parce que ses particules *E*, *F*, tendent à couler vers *G*? Mais on voit bien que cette tendance ne suffit pas; car si on suppose que ces particules soient toutes disposées en ligne droite, & tendent toutes à se mouvoir suivant cette ligne; il est évident, qu'abstraction faite de la proprieté des Fluides, le point *G* doit en soutenir l'effort. C'est aussi ce qui arriveroit, si les particules du Fluide étoient de petites boules solides & égales, dont les centres fussent rangés dans la droite *DG*. On dira peut-être, que les particules du Fluide ne sont pas de petites boules égales, & dont les centres soient rangés en ligne droite. Mais comme nous ignorons entiérement la nature des Fluides, ce seul cas d'exception paroît toujours suffisant pour infirmer la preuve que nous examinons ici, & pour nous convaincre, que c'est dans quelque proprieté particuliére aux Fluides, qu'il faut chercher la démonstration de la proposition dont il s'agit.

Ainsi dans le cas présent, il est aisé de faire voir que la liqueur *GDCB* ne peut rester en équilibre dans le vase *ABCH*, si sa surface *GD* n'est pas de niveau. Car imaginant la liqueur *GDCB* renfermée de tous côtés dans un vase qui n'ait qu'un seul trou *E*, il est visible que si la surface n'est pas de niveau, la liqueur *E* pressée suivant *EG*, doit nécessairement s'échapper par le trou *E*. Donc &c.

La seconde maniére de prouver qu'un Fluide doit se mettre de niveau, est de faire voir que le centre de gravi-

té d'une masse Fluide *CDFE* (Figure 3) supposée de niveau, est plus bas que celui d'une masse quelconque *HGKFE* égale à la masse *CDFE*. Or comme le centre de gravité d'un systême de Corps qui sont en équilibre, doit être le plus bas qu'il est possible, on conclut qu'un Fluide ne sauroit être en équilibre, si sa surface n'est pas de niveau &c.

Il me semble que cette seconde preuve est encore insuffisante. Car 1°. soit un vase rectangle *ABCH*, (Fig. 2) dont le fond *BC* soit incliné à l'horizon, & rempli de petites boules dont les centres soient dans des droites *DG* paralléles à *CB*, il est évident que ces boules en cet état seront en équilibre : leur centre de gravité n'est pas néanmoins le plus bas qu'il est possible. 2°. Je ne vois pas comment on employeroit ce Principe, pour démontrer qu'un Fluide dont les parties sont animées par des forces quelconques, & dont la surface est Courbe, se dispose de maniére que la direction de la pesanteur soit perpendiculaire à tous les points de sa surface : il ne paroît pas en effet qu'il puisse s'appliquer à un autre cas, qu'à celui où la pesanteur est la même pour toutes les particules, & a une direction constante. Car quand on dit que le centre de gravité d'un systême de Corps qui sont en équilibre, est le plus bas qu'il est possible, on entend par le mot de *centre de gravité*, ou *le centre de masse*, ou bien *le centre de gravité* proprement dit. * Or si l'Arc circulaire $\alpha\beta$ (Figure 3) est la surface d'une li-

* Voyez l'art. 51. du *Traité de Dynamique*.

queur dont toutes les parties pesent vers le centre Q de cet Arc, il est constant que la liqueur sera en équilibre, & que néanmoins le *centre de masse* du Fluide à surface circulaire $\alpha\beta FE$, ne sera point le plus bas qu'il sera possible : en effet, il est aisé de faire voir que si la masse Fluide $\alpha\beta FE$ avoit une surface plane, auquel cas (*art.* 12.) elle ne seroit pas en équilibre, son centre de masse seroit plus près du point H, que quand la surface du Fluide est circulaire. A l'égard du *centre de gravité* proprement dit, on peut démontrer qu'il n'est pas toujours le plus bas qu'il est possible. Car soit (Figure 4) dans un vase rectangulaire $ADEB$, un Fluide circulaire $FOSPK$, dont les parties pesent vers le centre Q du Cercle, & soit supposée la largeur du vase DE telle, que $DE \times 2\,QC$ soit égale à l'Aire $FOSPK$. Il est constant que le centre de gravité d'une masse Fluide qui rempliroit l'espace $MDEN = DE \times 2\,QC = FOSPK$, seroit au point Q ; au lieu que le centre de gravité de la masse $FOSPK$ est au-dessus de Q. Donc la masse de Fluide $FOSPK$, qui est en équilibre, n'a pas son centre de gravité aussi près du point de tendance Q, que le centre de gravité d'une masse égale de Fluide $MDEN$, dont la surface est plane, & qui par conséquent (*art.* 12.) n'est pas en équilibre. Donc &c.



CHAPITRE II.

De l'équilibre d'un Fluide, dont les parties ſont animées par une peſanteur dont la direction eſt conſtante.

THEORÊME III.

14. *SI un vaſe de figure quelconque* ACDEB (Fig. 5) *eſt rempli d'une liqueur dont la ſurface ſoit l'horizontale* AB, *& qu'ayant imaginé cette liqueur diviſée en tranches horizontales* ab, αϐ, *on ſuppoſe que toutes les parties de chaque tranche ſoient preſſées verticalement par une force accélératrice repréſentée par les ordonnées correſpondantes* Gg, Ff, &c. *de la Courbe* gfh; *je dis*

1°. *que la preſſion de la liqueur ſur le fond du vaſe* DE *ſera en raiſon compoſée de la baſe* DE, *& de l'Aire curviligne* GghH.

2°. *Que ſi le vaſe eſt ſoutenu par une puiſſance* P, *cette puiſſance ne ſupportera qu'une réſiſtance égale au poids total de la liqueur contenue dans le vaſe.*

Démonſtration de la première Partie.

Imaginons d'abord qu'il n'y ait que la ſeule tranche *AB* dont les parties ſoient peſantes, il eſt clair (*Art.* 1.) que la preſſion des particules de cette tranche ſe communiquera à la tranche voiſine & immédiatement inférieure, de maniére que toutes les parties de cette ſe-

conde tranche ſeront animées d'une preſſion égale à celle de AB ; ſi cette ſeconde tranche eſt outre cela animée d'une peſanteur particuliére, il eſt évident que toutes les parties de la troiſiéme tranche ſeront chargées d'une preſſion égale à la ſomme des peſanteurs des deux premiéres, & ainſi de ſuite. Donc la preſſion contre le fond DE ſera en raiſon compoſée du nombre des parties qui couvrent ce fond, & de la ſomme des forces accélératrices de chaque tranche, c'eſt-à-dire en raiſon compoſée de DE, & de l'Aire $GghH$. *Ce Q. F. 1°. D.*

Démonſtration de la ſeconde Partie.

Il eſt clair que le petit côté $a\alpha$ du vaſe eſt preſſé perpendiculairement ſuivant aZ (*Art.* 1.) avec une force égale à celle qui preſſe les particules de la tranche ab; & comme cette derniére force eſt repréſentée par l'Aire $FGgf$, il s'enſuit que l'effort contre $a\alpha$ eſt égal à $a\alpha \times FGgf$, & l'effort qui en réſulte pour pouſſer le point a ſuivant aO, ſera égal à $\frac{a\alpha \,.\, FGgf \times \alpha m}{a\alpha} = FGgf \times \alpha m$. On trouvera de même que l'effort qui tend à pouſſer le point C ſuivant $C\omega$, eſt $c\mu \times GgqQ = \alpha m \times GgqQ$; donc la différence de ces deux efforts, ou la force qui en réſulte pour pouſſer le point C en embas eſt $\alpha\mu \times FfqQ$, c'eſt-à-dire égale au poids de la liqueur contenue dans la petite colomne $a\alpha cC$. Donc en général, ſi on imagine une colomne de Fluide verticale infiniment mince, terminée par les ſurfaces AB

& *DE* (prolongées hors du vase s'il est nécessaire), il est clair que l'effort avec lequel la portion de Fluide renfermée dans cette colomne tend à pousser le vase en embas, est toujours proportionnel au poids de cette portion de Fluide. Donc l'effort total du Fluide pour faire descendre le vase, est proportionnel au poids total du Fluide contenu dans ce vase. Donc &c. *Ce Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE I.

15. La force qui tend à mouvoir le point *a* suivant *ba*, est proportionnelle à $am \times GgFf$, & par conséquent égale à celle qui tend à mouvoir le point *b* suivant *ab*. De plus, il est évident que la force résultante des efforts des particules du Fluide pour faire descendre le vase, passera par la même ligne verticale par laquelle passe le centre de gravité proprement dit de la Liqueur.

COROL. II.

16. L'action du Fluide contre le fond *DE* sera précisément la même, toutes choses d'ailleurs égales, que celle du Fluide qui seroit contenu dans un vase rectangulaire *DELI* de même base & de même hauteur, puisque la pression contre le fond *DE* est évidemment égale dans ce dernier cas au poids de la liqueur, c'est-à-dire à $DE \times GghH$.

Donc si le fond *DE* étoit mobile, il faudroit pour soutenir ce fond contre l'effort du Fluide, une puissance égale au poids du rectangle de liqueur *DELI*, au lieu

que si le fond *DE* est immobile & adhérent au vase *AaDEbB*, il faut pour soutenir ce vase, une puissance égale au poids de la liqueur contenue dans le vase *AaDEbB*.

SCOLIE I.

17. La démonstration que j'ai donnée de la premiére Partie du Theorême précedent, est parfaitement analogue à celle que M. *Newton* a donnée dans ses Principes, Livre II. Prop. XX. sur la quantité de pression que soutient un vase chargé d'un Fluide sphérique ; j'avoue qu'après y avoir bien pensé, cette démonstration m'a paru préférable à toutes les autres.

SCOLIE II.

18. On démontre ordinairement la premiére Partie de notre Theorême, dans le cas où le vase *ADEB* (Fig. *6*) est plus étroit en haut qu'en bas, en supposant que les côtés *AD*, *BE*, sont pressés par le Fluide qui tend à s'élever vers *AB*, & que la pression que soutient, par exemple, la petite portion *aa* du vase, se communique par la réaction au point *O* du fond. Mais 1°. il faudroit avoir démontré auparavant, que la quantité de la pression perpendiculaire à *aa*, est comme *aa* multiplié par *aS*, ce que négligent de prouver la plûpart de ceux qui démontrent par ce Principe la proposition dont il s'agit. 2°. Quand ce Principe, vrai en lui-même, auroit été prouvé, comment la résistance purement passive des côtés

du vase, peut-elle produire sur le point *O* une pression réelle? on dira, peut-être, que le point *O* est pressé, comme il le seroit par la colonne *OS*, parce qu'en imaginant que les parties *IAD*, *BLE* du Fluide contenu dans le rectangle *LEDI*, viennent à se geler tout-à-coup, le reste du Fluide demeurera comprimé comme auparavant: je n'ai à cela qu'une réponse à faire. Si au lieu de supposer que les parties *ADI*, *BLE* se gelent, on suppose que ce soit la partie *LITV*, il est constant que le fond *DE* ne portera plus que le poids du Fluide *DTVE*. Il n'est donc pas vrai de dire en général, que si une partie quelconque du Fluide se gele, le fond du vase supportera toujours la même pression qu'il supportoit d'abord. Donc dans l'hypothese que les parties *IAD*, *BLE* se gelent, on ne voit pas clairement, ce me semble, que le fond *DE* sera pressé comme auparavant, & cette vérité a besoin de démonstration.

COROL. III.

19. Il résulte du Theorême précedent, qu'une partie quelconque *aα* de la surface du vase *ACDEB* (Fig. 5) est pressée perpendiculairément suivant *aZ*, avec une force proportionnelle à *aα* × *FfgG*, c'est-à-dire, au poids d'un Cylindre, qui auroit *aα* pour base horizontale, *GF* pour hauteur, & dont les différentes tranches seroient animées par une pesanteur proportionnelle à l'Ordonnée correspondante de la Courbe *gfh*.

COROL.

Corol. IV.

20. Si un Syphon ou Tuyau recourbé eſt rempli d'une liqueur *EFKab*, (Fig. 7) dont les ſurfaces *EF*, *ab*, ſoient de niveau chacune en particulier, & que les peſanteurs des différentes tranches *ab*, *ef*, *NO* &c. de la partie *abNO* ſoient repréſentées par les Ordonnées *CD*, *Gd*, *PQ* &c. de la Courbe *DdQ*; les peſanteurs des différentes tranches de la partie *EFnO*, par les Ordonnées *HG*, *PR* &c. de la Courbe *HR*; enfin les peſanteurs des différentes tranches de la partie *NnK* par des Ordonnées *pq* ou *pu* qui ſoient égales dans l'une & l'autre Courbe; je dis que le Fluide ſera en équilibre, ſi l'Aire $CDQP =$ l'Aire $HGPR$. Car ſi on imagine un plan impénétrable *OK* qui ſépare le Fluide en deux parties, il eſt évident qu'un point quelconque *r* de ce plan eſt preſſé ſuivant *rm* par l'action du Fluide *abNOr*, avec une force proportionnelle à l'Aire *CDdQqpC*; & que le même point *r* eſt pouſſé ſuivant *rM* par l'action du Fluide *FEnOr*, avec une force proportionnelle à l'Aire *GHRupG*; or pour que le Fluide ſoit en équilibre, il faut que ces deux forces ſoient égales, & par conſéquent, que $CDdQqpC = GHRupG$. Donc puiſque (*hyp.*) $QqpP = RupP$, il eſt clair que $CDQP = HGPR$.

De-là il s'enſuit, que ſi la liqueur *EFKab* eſt une liqueur homogene, dont toutes les parties ſoient animées par une même peſanteur, les ſurfaces *EF*, *ab*, doivent

être à hauteur égale dans les deux branches, pour qu'il y ait équilibre. Car alors les Courbes HR, DdQ deviennent des droites paralléles à CP, & l'on a $CD = HG$. Donc les Aires $CDQP$, $HGPR$ ne sauroient être égales, à moins que GP ne soit égale à CP : donc EF, ab, seront à la même hauteur.

Scolie III.

21. Le Principe de Descartes, pour expliquer l'équilibre d'une liqueur dans un Syphon, consiste à faire voir que si on suppose le Fluide à la même hauteur dans les deux branches, il ne pourroit descendre dans une des branches & monter dans l'autre, sans que les quantités de mouvement fussent égales dans la partie de Fluide qui monteroit & dans celle qui descendroit ; d'où cet Auteur conclut qu'il y a équilibre entre les deux Tranches, quand elles sont à même hauteur. Ce Principe est analogue à celui dont ce même Philosophe s'est servi pour démontrer l'équilibre sur le Levier, & quoiqu'on ne démontre par ce moyen l'équilibre qu'indirectement, il faut néanmoins avouer que ce Principe a l'avantage d'être général, soit pour l'équilibre des Fluides, soit pour celui des Corps solides : aussi n'est-il autre chose que cette Loi de Méchanique, que des puissances sont en équilibre quand elles sont entr'elles en raison inverse de leurs vîtesses, estimées suivant la direction de ces puissances; Loi d'où dépend celle de la conservation des forces vives, comme je l'ai prouvé dans ma Dynamique.

M. *Daniel Bernoulli* démontre dans son Hydrodynamique, que le Fluide doit se mettre à même hauteur dans les deux branches, parce qu'en cet état son centre de gravité est le plus bas qu'il est possible. Cette démonstration, quoiqu'analogue à celle dont on se sert communément pour prouver le niveau des Fluides, & dont nous avons fait mention (*art.* 13.) est assurément ingénieuse. Mais sans nous arrêter ici à faire sur cette preuve de M. *Bernoulli* des remarques analogues à celles que nous avons faites *art.* 13. sur un cas semblable, nous nous contenterons d'observer que ce Principe, ainsi que celui de M. *Descartes*, est plutôt une Loi secondaire & une propriété de l'équilibre, que la Loi fondamentale de l'équilibre même.

De l'équilibre d'un Fluide renfermé dans un vase ouvert par en haut & par en bas.

THEORÊME IV.

22. *Soit un vase quelconque indéfini* POTQ (Fig. 8) *dont la partie* ADCZ *terminée par les parallèles* AD, ZC, *soit remplie de Fluide. Soit imaginé ce Fluide divisé en tranches* FKG *parallèles à* AD, *& que tous les points de chaque tranche soient animés par une force accélératrice représentée par l'Ordonnée correspondante* kf *de la Courbe* dfb, *(les Ordonnées* ad *représentant les forces accélératrices positives, c'est-à-dire, celles qui tendent de* L *vers* B, *& les Ordonnées* kf, *celles dont la direction est en sens contraire)*

je dis que le Fluide en cet état ne peut être en équilibre, à moins que l'Aire adnmobc *ne soit zero, c'est-à-dire la somme des Aires positives égale à la somme des négatives.*

Car supposons que le vase soit terminé par un fond immobile *ZC*, la pression de ce fond sera $= ZC \times adnmobc$. Donc si l'Aire *adnmobc* n'étoit pas $= 0$, ce fond souffriroit une certaine pression; par conséquent si on l'imaginoit anéanti, le Fluide descendroit nécessairement, & ne seroit plus en équilibre, ce qui est contre l'hypothese. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

J'ai démontré cette proposition d'une autre maniére *art.* 173. de ma Dynamique.

COROLLAIRE I.

23. 1°. Si on mene les lignes *ZH*, *CE*, paralléles à *LB*, l'effort du Fluide contre les parois du vase, sera égal au poids du Fluide contenu dans les espaces *AHZ*, *DCE*. Cela se démontre comme la seconde Partie du Theor. 3.

2°. En général, un point quelconque *G* du vase est pressé perpendiculairement avec une force proportionnelle à l'Aire $adin - nfk$.

COROL. II.

24. Il ne suffit pas pour qu'il y ait équilibre, que l'Aire *adnmobc* soit zero, il faut encore 1°. que la force qui anime la surface *AD*, tende de *L* vers *B*, & que celle qui anime *ZC*, tende de *B* vers *L*: ce qui est évident.

2°. il faut que l'Aire *adnmobc* qui commence & qui finit par zero, & dont les différentes parties *adin* expriment les pressions des tranches *FG* correspondantes, n'ait aucune partie exprimée négativement, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucun point où la somme des Aires négatives surpasse la somme des Aires positives. Car alors une des tranches seroit plus pressée vers le haut que vers le bas, & l'équilibre seroit rompu : cette seconde condition renferme la premiere, comme on le peut voir aisément. Ces deux remarques nous seront d'un grand usage dans la Theorie du mouvement des Fluides.

COROL. III.

25. Si on nomme φ la force accélératrice indéterminée de chaque tranche, & LK, x, on aura en faisant $LK = LB$, $\int \varphi\, dx = o$. Donc si dv est la petite vîtesse, qui dans un tems constant dt seroit proportionnelle à la force accélératrice φ, on aura $\frac{\int dv\, dx}{dt} = o$, ou simplement $\int dv\, dx = o$.

COROL. IV.

26. Si on décrit la Courbe *exhrs* (Fig. 9 & 10) dont les Ordonnées *qx*, *tu*, &c. soient proportionnelles aux Aires correspondantes *adin*, *adinfk*, &c. Il est clair 1°. que cette Courbe coupera son Axe en *e* & en *s*.

2°. Qu'elle ſera paralléle à ſon Axe dans les endroits x, h, r &c. qui répondent aux endroits n, m, o, où la Courbe $adin$ coupe le ſien. 3°. Qu'il y aura équilibre, ſi toutes les Ordonnées qx, tu, lh &c. ſont d'un même côté de es comme dans la Figure 9. 4°. Au contraire, qu'il n'y aura point équilibre, ſi toutes ces Ordonnées ne ſont point d'un même côté (Fig. 10), au moins en ſuppoſant que les particules du Fluide n'ayent aucune tenacité entr'elles. 5°. Que ſi dans ce dernier cas on ſuppoſe le Fluide $ADCZ$ (Fig. 10) renfermé dans le vaſe de toutes parts, c'eſt-à-dire qu'il y ait un fond immobile en AD & un autre en CZ, le fond ſupérieur AD ſera preſſé avec une force égale à la plus grande lh de toutes les Ordonnées négatives que peut avoir la Courbe, & que le fond inférieur CZ ſouffrira la même preſſion. 6°. En général, ſi le vaſe eſt fermé de toutes parts, alors ſoit que l'Aire $adinfmzobc$ ſoit zero ou non, le fond AD ſera toujours preſſé avec une force proportionnelle à la plus grande lh de toutes les Ordonnées négatives; & la preſſion que ſouffriroit l'autre fond, ſi par exemple, ce fond étoit en VN, ſeroit proportionnelle à l'Ordonnée φy. Tout cela étant aiſé à voir avec un peu d'attention, nous ne nous arrêterons pas à l'expliquer plus en détail.

Nous verrons ci-deſſous ce qui doit arriver, lorſque les parties des Fluides ſont ſuppoſées avoir de la tenacité entr'elles.

De l'équilibre des Fluides, avec les solides qui y sont plongés.

THEORÊME V.

27. *Soit un Fluide* ABDE (Fig. 11) *dont les parties soient animées par des pesanteurs de directions constantes, & dans lequel toutes les parties d'une même tranche horizontale* AB, ab &c. *soient animées par la même pesanteur; si on suppose qu'une partie quelconque renfermée par la surface quelconque* KPZ *vienne à se durcir tout-à-coup, ses parties conservant néanmoins la même pesanteur qu'auparavant, je dis que l'équilibre n'en sera point troublé.*

Car par la même méthode, par laquelle on a fait voir (*art.* 14.) que le vase *ABDE* étoit poussé en embas par une force égale au poids du Fluide qu'il contenoit, on prouvera que le Corps *KPZ* est poussé en enhaut par une force égale au poids du volume de Fluide dont il occupe la place, & que la direction de cette force passe par le centre de gravité proprement dit du Corps *KPZ*. Mais par l'hypothese, le Corps *KPZ* tend à descendre avec une force égale au poids de ce même volume de Fluide. Donc ces deux forces sont égales & contraires : donc le Fluide & le Corps resteront en repos.

COROLLAIRE I.

28. La même proposition seroit encore vraye, quand on ne supposeroit pas que toutes les parties du Corps *KPZ* conservassent la même pesanteur qu'elles avoient

étant Fluides, pourvu que la pesanteur totale de la masse *KPZ* fut la même que celle qu'elle avoit, & que le centre de gravité de cette masse se trouvât dans la même ligne verticale, par laquelle son centre de gravité passoit auparavant.

Corol. II.

29. Donc un Corps ne peut rester en équilibre dans un Fluide tel que nous venons de le décrire, à moins que son poids ne soit égal à celui du volume de Fluide dont il occupe la place, & que son centre de gravité proprement dit, ne soit dans la même ligne verticale avec le centre de gravité de ce volume de Fluide.

Corol. III.

30. Si le Corps n'est plongé qu'en partie dans le Fluide, il faut pour qu'il y reste en équilibre, que son poids total soit le même que celui du volume de Fluide égal à la partie plongée, & que le centre de gravité du Corps soit dans la même ligne verticale, dans laquelle auroit été le centre de gravité du volume de Fluide dont sa partie submergée tient la place.

Corol. IV.

31. Delà on voit qu'un Corps moins pesant qu'un égal volume d'eau doit s'y enfoncer, jusqu'à ce que sa partie submergée occupe la place d'un volume d'eau aussi pesant que le Corps entier: & que de plus il doit s'y disposer

poser de maniére que le centre de masse de la partie submergée, & celui de la partie non submergée soient dans une même ligne verticale ; car le centre de masse se confond alors avec le centre de gravité.

COROL. V.

32. Donc pour trouver la situation que doit prendre un Corps posé sur un Fluide, dont la pesanteur spécifique est à celle du Corps comme *m* à *n*, il faut résoudre ce Problême de Geométrie : *un Corps* CRS (Fig. 12) *de figure quelconque étant donné, le diviser en deux parties* CRs, RrS, *qui soient entr'elles comme* m — n *à* n, *&* *dont les centres de gravité* K, V *soient dans une droite* KV *perpendiculaire à la ligne* RS *qui sépare ces deux parties*, ou ce qui revient au même, *trouver la partie* RrS *qui soit au Corps entier comme* n *à* m, *& dont le centre de gravité* V *soit avec le centre* G *de la figure entiére dans une même ligne* GV *perpendiculaire à* RS.

COROL. VI.

33. La ligne *GV* étant perpendiculaire à *RS*, je dis que la distance entre les centres de gravité *G*, *V*, est la plus petite qu'il est possible. Car soit la partie *rSs* égale à *RrS*, les lignes ou plans *RS*, *rs* faisant un angle infiniment petit ; pour trouver le centre de gravité de *rSs*, il faut d'abord chercher celui de la petite partie *Rpr*, qu'on pourra supposer en *q*, sur la ligne *pR*, puis faire *qV* : *Vi* :: *RrS* : *Rpr*, pour avoir le centre de gravité *i*

de la partie rpS; ensuite supposant que t soit le centre de gravité de Sps, on fera $tu:ui :: Sps$ ou Rpr qui lui est égale, est à RrS, & l'on aura le centre de gravité u de rSs. Donc $tu:ui :: qV:Vi$. d'où l'on voit que Vu est parallèle à RS, & par conséquent perpendiculaire à GV : donc Gu est plus grande que GV, & n'en diffère que d'un infiniment petit du second ordre ; & par conséquent GV est un *minimum*.

COROL. VII.

34. Si sur la surface KB (Fig. 13) d'une eau stagnante, on place dans quelque situation que ce soit un Corps dont la densité soit plus grande que celle d'un égal volume d'eau ; que V soit le centre de masse de la partie enfoncée RQS, K le centre de la partie RCS, G le centre du Corps entier, je dis que le point par lequel il faudroit suspendre ou soutenir le Corps pour qu'il restât en équilibre, seroit le centre de masse qu'auroit ce Corps, si sa partie RCS restant la même, sa partie RQS devenoit d'une densité égale à la différence des densités du Corps & du Fluide. Car l'effort du Fluide pour faire monter le Corps, peut être regardé comme réduit au centre V (*art.* 27.), & si on nomme m & n les densités du Fluide & du Corps, & que L soit le point de suspension, on aura $RQS \times m \times LO = CQS \times n \times LZ$. Donc $RQS.m.VL = CQS.n.LG = n(RQS.VL - CRS..LK)$. Donc $RQS \times [n - m]: CRS \times n :: KL:VL$. Donc &c.

SCOLIE.

35. Quoique le point *L* soit dans l'hypothese précédente, le centre de gravité proprement dit du Corps *CQS*, tant que ce Corps demeure plongé dans l'eau, il faut néanmoins bien se garder de croire, que si ce Corps étoit abandonné à lui-même, il lui arrivât les mêmes choses que s'il étoit réellement composé de deux parties, dont la densité & la pesanteur spécifique fussent différentes. C'est une erreur dans laquelle certains auteurs sont tombés, & dont nous aurons lieu de parler dans la suite.

De la Loi de la pression dans les différentes couches d'un Fluide, dont les parties sont animées par une pesanteur de direction constante.

THEORÊME VI.

36. *Si les différentes parties d'un Fluide* ABCD (Fig. 14) *renfermé dans un vase, sont animées par une pesanteur dont la direction soit constante, je dis qu'il est nécessaire pour l'équilibre, que toutes les parties d'une même tranche horizontale* AB, ab, &c. *soient animées par une pesanteur égale.*

1°. La pesanteur doit être égale dans toutes les parties qui sont à la surface *AB*. Car imaginons la ligne *ab* infiniment proche de *AB*, & supposons que cette ligne soit une surface solide qui sépare la partie *ABba* du reste du Fluide. Il est évident que cette partie *ABba* ne peut rester en équilibre, si la pression n'est pas égale partout.

Suppoſons préſentement que la ſurface ſolide ab ſoit anéantie ; nous venons de voir que la partie de Fluide $ABba$ conſiderée comme ſeule, ne pouvoit reſter en équilibre : or le Fluide inférieur, quelle que ſoit la peſanteur qui anime ſes parties, ne peut réſiſter à l'effort que font les parties $ABba$ pour ſe mouvoir ; donc l'équilibre ſera rompu. Donc il eſt néceſſaire pour qu'il y ait équilibre, que toutes les parties de la ſurface AB ſoient animées par une peſanteur égale.

2°. Puiſque toutes les parties de la ſurface AB, ou ce qui eſt la même choſe, de la petite portion de Fluide $ABba$ ſont également preſſées ; il eſt clair que cette partie $ABba$ conſiderée comme ſeule reſteroit en équilibre, & qu'ainſi, abſtraction faite de la partie $ABba$, le reſte du Fluide $abDC$ doit auſſi demeurer en équilibre : donc la peſanteur doit être égale dans tous les points de la ſurface ab de cette partie $abDC$, & on prouvera par la même méthode, que la peſanteur doit être égale dans tous les points de chaque tranche horizontale, quoiqu'elle puiſſe varier d'une tranche à l'autre. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

De l'équilibre de différens Fluides entr'eux.

THEORÊME VII.

37. *La peſanteur étant ſuppoſée conſtante & de direction donnée, des liquides de différente denſité renfermés dans un même vaſe, ne peuvent être en équilibre, à moins que les*

ſurfaces communes qui les ſéparent, ne ſoient de niveau, ou; ce qui revient au même, toutes les parties d'une même tranche horizontale doivent avoir une même denſité.

1°. Toutes les parties de la ſurface *AB* ou de l'eſpace *ABba*, dans leſquelles on ſuppoſe la peſanteur égale, doivent avoir la même denſité. Car il eſt clair qu'ayant toutes la même denſité, elles ſeroient en équilibre : or cela poſé, ſi on augmentoit la denſité dans certaines parties ſans l'augmenter également dans les autres, ce ſeroit augmenter la preſſion dans certains endroits, ſans l'augmenter également partout, ce qui ne pourroit manquer de rompre l'équilibre (*art.* 36.).

2°. Ayant fait voir que toutes les parties du Fluide *ABba* conſideré comme iſolé, doivent avoir une denſité égale, on prouvera comme on l'a fait *art.* 36. n. 2. que toutes les autres tranches horizontales doivent être compoſées de parties d'une égale denſité.

COROLLAIRE I.

38. Si deux liqueurs différentes ſont en équilibre dans les deux branches d'un Syphon, elles doivent s'y diſpoſer de maniére, que la ſurface commune qui ſépare ces deux liqueurs ſoit de niveau.

COROL. II.

39. Tout ce que nous avons dit dans les propoſitions précédentes ſur la preſſion d'un Fluide homogene, peut s'appliquer auſſi à la preſſion d'un Fluide hetérogene,

pourvu que les lignes Ff, Gg, Qq &c. (Fig. 5) qui dans ces propositions représentoient les forces accélératrices des tranches correspondantes, soient supposées ici proportionnelles au produit de la force accélératrice de chaque tranche & de sa densité.

Ainsi on voit que la pesanteur étant supposée constante, deux liqueurs différentes doivent se disposer de telle maniére dans les branches d'un Syphon (Fig. 7) que la hauteur de chacune au-dessus de la surface commune qui les sépare, soit en raison inverse de sa densité. Car alors les Courbes HR, DdQ deviendront des droites paralléles à CP, & les lignes HG, CD seront entr'elles comme les densités des deux liqueurs. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut (*art.* 20.) que $HG \times GP = CD \times CP$. Donc $GP : CP :: CD : HG$.

CHAPITRE III.

Examen de différentes questions qu'on peut proposer sur l'équilibre des Fluides.

§. I. *De la Loi de la pesanteur & de la densité dans les différentes tranches d'un Fluide, dont les parties sont animées par une pesanteur de direction constante.*

40. NOUS avons vu ci-dessus, que dans un Fluide dont les parties sont animées par une pesanteur de direction constante, tous les points d'une même tran-

che horizontale doivent être également pressés, & qu'ainsi la pesanteur doit être la même dans tous les points d'une même couche, si la densité est partout la même, & que la densité doit être la même dans tous les points d'une même couche, si la pesanteur est constante.

Mais en supposant dans le premier cas que la pesanteur varie d'une couche à l'autre, & dans le second cas, que la densité varie d'une couche à l'autre, suivant quelle Loi doivent-elles varier ? cette Loi est-elle absolument indifférente, ou est-il nécessaire que les parties plus pesantes ou plus denses occupent le fond ?

Il est évident en premier lieu, que si un Fluide est en équilibre, & qu'une partie quelconque d'une tranche horizontale vienne à augmenter en pesanteur ou en densité, l'équilibre sera rompu. Mais qu'on augmente tant qu'on voudra la pesanteur ou la densité de toutes les parties d'une tranche quelconque, il n'est pas moins évident que l'équilibre ne peut cesser, à moins qu'une partie ne céde avant les autres. Or toutes les parties tendant à descendre avec une égale force, quelle raison y a-t'il pour que l'une céde plutôt que l'autre ? Il y a donc lieu de croire dans la Théorie, qu'un Fluide plus pesant ou plus dense peut se soutenir sur un autre moins pesant ou moins dense, pourvu que la surface commune qui les sépare, soit parfaitement de niveau.

Ainsi, par exemple, si un vase Cylindrique est rempli d'une liqueur homogene & uniformément pesante *ABCD*, (Fig. 15) & qu'on imagine qu'une partie quelconque

renfermée entre les tranches ab, $a\beta$, vienne à augmenter en pesanteur ou en densité; je conçois qu'à parler en rigueur, l'équilibre ne doit point en être troublé.

Il paroît donc que la Loi de la pesanteur ou de la densité d'une couche à l'autre, peut dans la Théorie être supposée telle qu'on voudra.

On dira peut-être que les différentes tranches du Fluide ne pouvant pas avoir leurs surfaces parfaitement Mathematiques, il y aura toujours quelques parties qui étant plus pressées que les autres, descendront les premiéres & rompront l'équilibre. On pourroit même ajoûter, que par cette raison on ne doit pas regarder l'augmentation de densité du Fluide contenu entre deux tranches, comme analogue à l'augmentation de pesanteur, parce qu'on peut supposer que la pesanteur soit reglée par une Loi Mathematique, & qu'ainsi toutes les particules contenues dans une même tranche Mathematique pesent également, ce qu'on ne peut pas faire pour la densité. Mais 1°. est-il plus absurde de supposer dans la Théorie, que la densité soit reglée par une Loi Mathematique, que de supposer la pesanteur réglée par une telle Loi ? j'avoue que je ne vois point quelle pourroit être la raison de cette différence; puisque dans l'état naturel, l'une de ces suppositions n'est pas plus recevable que l'autre ? 2°. Est-il bien certain que l'équilibre ne puisse subsister sans une égalité de pression Mathematique & exacte en tout sens? Peut-on supposer avec vraisemblance, que toutes les tranches horizontales d'un Fluide contenu dans un vase Cylindrique

Cylindrique, soient exactement égales en densité & en pesanteur, que le poids de toutes les colomnes verticales soit Mathematiquement le même ? les parties du Fluide restent néanmoins en repos, parce qu'elles ont une certaine adhérence entr'elles ; & l'équilibre subsistera tant que cette adhérence sera suffisante, pour résister au mouvement qui proviendroit de l'inégalité de pression.

Un moyen que j'avois imaginé pour faire soutenir s'il étoit possible une liqueur plus pesante sur une moins pesante, comme du mercure sur de l'eau, étoit de verser d'abord du mercure dans un Syphon, ensorte qu'il s'y mît de niveau, puis de verser dans l'une des branches une assez grande quantité d'eau, pour obliger le mercure de monter tout entier dans l'autre branche, ensorte qu'une partie de l'eau passât même dans l'autre branche ; de cette maniére on auroit eu un Fluide plus pesant qui se seroit soutenu au-dessus d'un autre plus leger.

Mais en examinant la chose de plus près, j'ai reconnu, avant d'en faire l'Expérience, qu'elle ne pourroit réussir comme je l'avois projetté. Soit *EFON* (Fig. 16) le mercure, *BKON* l'eau ; on conçoit aisément qu'en versant de l'eau peu à peu, le mercure *NO* descendra jusqu'en *RQ*. Mais qu'on verse ensuite encore un peu d'eau, il est évident que si l'eau continue à pousser le mercure, la surface commune qui séparera ces deux liqueurs doit cesser d'être de niveau, & que l'équilibre doit se rompre ; en effet, en versant un peu d'eau lorsque le mercure est arrivé en *RQP*, on voit par l'Expérience

E

que la ſurface *RQ* (Fig. 17) du mercure s'incline peu à peu, & que l'eau ſe gliſſe dans l'eſpace *rQR*, & ſi on en verſe un peu davantage, on la voit couler le long de *QE* & venir ſe mettre au haut du mercure en *ef*, la ſurface *rQ* du mercure reſtant en repos. Le peu d'adhérence du mercure aux parois du Tuyau, fait que l'eau ſe gliſſe aiſément entre le Tuyau & le mercure, & l'adhérence de l'eau aux parois du Tuyau, fait que l'équilibre ſubſiſte, quoique la ſurface *rQ* ne ſoit pas de niveau.

On auroit, ce me ſemble, quelque peine à trouver le moyen de faire ſoutenir ſur l'eau une liqueur auſſi peſante que le mercure, & auſſi peu adhérente aux autres Corps. Quand bien même on ſuppoſeroit qu'une portion *ABba* de l'eau contenue dans un vaſe *ABCD* (Fig. 15) fût transformée en mercure tout-à-coup ; comme le mercure ſeroit peu adhérent au vaſe, les parties de l'eau moins preſſées en *a* & en *b* que partout ailleurs, ſe gliſſeroient ſuivant *aA* & *bB* entre le mercure & le vaſe pour venir gagner le haut.

Au reſte, on voit très-ſouvent des liqueurs & même des Corps ſolides plus peſans que l'eau, ſe ſoutenir ſur la ſurface de l'eau ; ce qu'on ne peut attribuer qu'à la difficulté que la liqueur ſupérieure auroit à diviſer les parties de l'eau, difficulté qui eſt plus grande que l'excès du poids de ces liqueurs ou de ces Corps ſur le poids de l'eau.

Comme la peſanteur eſt une force qu'on ſuppoſe ani-

mer également tous les Corps, & qu'elle eſt par conſéquent la même dans tous les Fluides, nous ne pouvons connoître par l'Expérience ce qui arriveroit à des Fluides qui ſeroient différens les uns des autres par leur peſanteur, comme nous connoiſſons ce qui arrive aux Fluides qui différent les uns des autres par leur denſité : nous ne pouvons ſavoir par ce moyen, ſi de deux Fluides également denſes & inégalement peſans, le plus peſant ſeroit indifféremment au-deſſus ou au-deſſous du plus leger. Forcés de nous en tenir là-deſſus à des conjectures, nous croyons que la ſurface commune qui ſépare ces deux Fluides, ne pouvant être, à parler en rigueur, ni parfaitement Mathematique, ni également preſſée en tous ſes points, le Fluide plus peſant peut ſe ſoutenir ſur le plus leger, pourvu que les parties du plus leger ayent entr'elles une adhérence aſſez forte, pour que l'équilibre puiſſe ſe conſerver. Une obſervation aſſez ſenſible peut appuyer ce que nous venons d'avancer. En effet, ſi on ſuppoſe qu'il y a dans les parties des Fluides une attraction mutuelle qui agit à une très-petite diſtance, attraction qu'on ne peut guère ſe diſpenſer de reconnoître, il eſt aiſé de voir que les parties qui ſont à la ſurface, ſeront plus attirées que les autres, & par conſéquent peſeront davantage, ſans qu'on puiſſe néanmoins ſuppoſer que la peſanteur ſoit exactement égale dans toutes les parties de chaque tranche.

Concluons donc 1°. que dans la Théorie & en parlant Mathematiquement, l'excès de peſanteur & de den-

sité des tranches supérieures, sur la pesanteur & la densité des inférieures, ne nuira point à l'équilibre.

2°. Qu'elle ne doit point même y nuire, Physiquement parlant, si la tenacité des particules est assez grande pour résister à l'effort qui proviendroit de l'inégalité de pression.

§. II. *De l'équilibre d'un Fluide où les tranches varient à la fois en pesanteur & en densité.*

41. Nous avons vu ci-dessus (*art.* 27.) que si un Fluide est composé de tranches horizontales, dont chacune ait toutes ses parties également denses & également pesantes, & qu'une partie quelconque de ce Fluide vienne à se durcir tout-à-coup, l'équilibre n'en sera point troublé. Nous avons prouvé même que si cette masse solide étoit d'une densité différente de celle du Fluide, l'équilibre subsisteroit toujours, pourvu qu'elle eût le même poids total & le même centre de gravité que le volume de Fluide dont elle occupe la place. Qu'on imagine à présent que cette masse solide différente par sa densité du Fluide qui l'environne, devienne liquide tout-à-coup; l'équilibre ne peut subsister qu'autant que chaque tranche horizontale sera également pressée en tous ses points (*art.* 36.). Or comme toutes les parties d'une même tranche ne sont point d'une égale densité, puisqu'on a supposé que la masse n'étoit point homogene au Fluide, la pression ne peut être égale, à moins que toutes les parties d'une même tranche n'ayent une pesanteur qui

ſoit en raiſon inverſe de leur denſité : mais ſi cette condition eſt obſervée, je ne vois pas ce qui pourroit empêcher que l'équilibre ne ſe conſervât.

Ainſi je crois qu'on peut avancer cette eſpece de Paradoxe, que deux Fluides d'inégale denſité peuvent ſe diſpoſer l'un par rapport à l'autre, de telle maniére qu'on voudra, ſi leurs peſanteurs ſont en raiſon inverſe de leurs denſités. Au moins le peu de lumiéres que nous avons ſur les propriétés des Fluides, ne nous prouve point, ce me ſemble, que cela doive être autrement.

CHAPITRE IV.

De l'adhérence que les parties des Fluides ont entr'elles.

§. I.

Conjectures ſur la cauſe de cette adhérence.

42. NOUS avons fait mention ci-deſſus de l'adhérence que les particules des Fluides ont entr'elles, adhérence qui contribue comme nous avons vû, à y entretenir l'équilibre, malgré l'inégalité de preſſion, pourvu que cette inégalité ſoit peu conſidérable. On ne peut attribuer cette adhérence qu'à une force qui tient les particules Fluides unies entr'elles, & qui fait qu'elles ne ſe laiſſent ſéparer qu'avec difficulté. Cette force eſt-elle purement paſſive, c'eſt-à-dire ne provient-elle que de l'aſperité des particules Fluides qui ſe touchent, ou eſt-ce

une force agiſſante qui tende à unir ces particules & à les approcher les unes des autres? c'eſt ce que nous ne déciderons point ici. Il y a bien de l'apparence que les deux cauſes concourent à la fois. La figure ronde que les particules de l'eau affectent, & leur adhéſion aux parois des Corps, pourroient en être la preuve.

Quoiqu'il ſoit difficile de ne pas admettre une Attraction mutuelle entre les parties des Fluides, par laquelle elles agiſſent les unes ſur les autres à une très-petite diſtance; je ne ſai ſi c'eſt avec raiſon que pluſieurs Auteurs attribuent à cette Attraction l'adhérence des particules des Fluides. Soit *C* (Fig. 18) une des particules, *CA* la diſtance à laquelle l'Attraction peut agir. Si du rayon *CA* on décrit un Cercle, il eſt certain que la particule *C* étant attirée également de tous côtés par la matiére renfermée dans ce Cercle, ſera dans le même cas que ſi elle n'étoit point attirée du tout; & par conſéquent l'Attraction ne produira point par elle-même l'adhéſion des parties. On dira peut-être que l'Attraction ne pouvant être parfaitement la même de tous côtés, la particule *C* ſera néceſſairement plus attirée d'un côté que de l'autre. Mais outre qu'il réſulteroit delà une preſſion fort petite, l'adhérence des parties ne ſeroit pas la même partout, quoique nous ayons lieu de juger qu'elle eſt telle. On pourroit peut-être dire encore, que les parties qui ſont à la ſurface *agb*, ou à une diſtance de cette ſurface, moindre que *CA*, n'étant point dans le cas d'être attirées également de tous côtés, compriment les parties infé-

rieures ; & que la preſſion ſe tranſmet ainſi de couche en couche. Mais ſi on ſuppoſe que le vaſe qui renferme le Fluide, ſoit de même denſité que le Fluide & d'une épaiſſeur $ac = AC$; alors les particules du Fluide ſeront partout également attirées en ſens contraires : cependant il n'eſt pas douteux qu'elles ne conſervent la même adhérence entr'elles.

Toutes ces raiſons réunies me font croire, que ſi l'adhérence des particules des Fluides a une cauſe active, cette cauſe eſt vraiſemblablement une force qui comprime ces parties du dehors au-dedans. Ne faiſons point de l'Attraction ce que les Cartéſiens ont fait de leur matiére ſubtile, qui, à force d'avoir été employé à toutes ſortes d'uſages, n'eſt plus maintenant propre à aucun. Réſervons l'Attraction pour les Phenomenes où nous ne pourrons nous en paſſer. Nous n'en aurons beſoin que trop ſouvent.

§. II.

Où l'on examine quelles doivent être les Loix de l'équilibre des Fluides, ſi on a égard à l'adhérence de leurs parties.

43. Nous examinerons principalement dans cette Section, le changement que l'adhérence des particules doit apporter aux Loix de l'équilibre d'un Fluide $ADZC$ (Fig. 8) ſuſpendu dans un vaſe qui n'a point de fond, ni en AD, ni en ZC. C'eſt principalement en ce cas-là, que l'effet de l'adhérence des particules eſt ſenſible: car lorſqu'un Fluide eſt renfermé dans un vaſe dont il

presse le fond, l'adhérence des particules n'a guère d'autre effet que celui dont nous avons fait mention dans l'article 40, savoir d'empêcher que l'équilibre ne se rompe, quoique la pression ne soit pas exactement égale de tous côtés. D'un autre côté, la Théorie que nous allons donner, nous sera principalement utile, pour déterminer dans le second Livre de cet ouvrage les Loix du mouvement d'un Fluide dont les parties sont adhérentes entr'elles, & qui coule dans un vase quelconque.

44. On ne sauroit douter que l'adhérence des particules des Fluides n'exige une force finie pour être surmontée. Mais il est difficile de déterminer d'où provient cette adhérence. On peut faire sur cela trois hypotheses. 1°. En regardant les particules du Fluide comme parfaitement polies, on peut supposer que leur adhérence mutuelle provient d'une force active, appliquée à tous les points de la surface extérieure du Fluide, & dont la pression se distribue également aux autres points suivant la propriété des Fluides. 2°. On peut supposer que les parties des Fluides sont inégales, & accrochées, pour ainsi dire, les unes aux autres, & regarder cette inégalité comme la seule cause de leur adhérence. 3°. On peut enfin supposer que l'adhérence provienne de la réunion des deux causes précedentes. Nous allons examiner par ordre & successivement les Loix de l'équilibre dans ces trois hypotheses.

I.

I.

45. Nous ſuppoſerons d'abord que l'adhérence des parties du Fluide *ADZC* eſt cauſée par une force qui preſſe tous les points de la ſurface *AD*, ſuivant une direction perpendiculaire à cette ſurface, & qui agit de *L* vers *B*, force dont l'action eſt contrebalancée par celle d'une autre force égale appliquée à tous les points de la ſurface *ZC*, & qui agit en ſens contraire de *B* vers *L*. Nous nommerons chacune de ces deux forces, *force d'adhérence*, & comme ce ſont des forces finies, nous les ſuppoſerons repréſentées par une Aire ou ſurface conſtante que nous appellerons *A*, pour l'exprimer d'une maniére analogue à celle dont nous avons repréſenté juſqu'ici la preſſion des tranches *ab* d'un Fluide peſant *ABDE*, (Fig. 5) preſſion que nous avons déſignée par des Aires de Courbes correſpondantes *GgfF*.

46. Propos. I. *Si un Fluide* ADZC (Fig. 8) *eſt renfermé dans un vaſe* POTQ *qui n'ait aucun fond en* AD, *ni en* ZC, *& que les différentes tranches* FG *de ce Fluide ſoient preſſées par des forces accélératrices* kf, *telles qu'abſtraction faite de l'adhérence des parties, le Fluide ſoit en équilibre; je dis qu'il ſera encore en équilibre, ſi on a égard à cette adhérence.*

Car il eſt évident qu'une tranche quelconque *FG* eſt preſſée également ſuivant *KB* & ſuivant *KL*, par l'action des deux forces d'adhérence appliquées en *AD* & en *ZC*. Mais (*hyp.*) la ſurface *FG* étoit déja preſſée éga-

lement en ſens contraire, avant qu'on eut égard à l'adhérence des parties. Donc &c.

47. PROPOS. II. *Suppoſons préſentement qu'abſtraction faite de l'adhérence des parties, le Fluide* ADZC (Fig. 10) *ne fût pas reſté en équilibre, c'eſt-à-dire* (art. 22 & 26) *que l'Aire* adnmobc *ne ſoit pas* $= o$, *ou que la Courbe* euhs *ait des Ordonnées négatives ; on demande de ce qui doit arriver, ſi on a égard à l'adhérence de parties.*

Comme nous exprimons ici les différentes parties de l'Aire *adnmobc* par les Ordonnées de la Courbe *euhs*, nous exprimerons l'Aire A qui repréſente la force d'adhérence par une ligne finie eR. Cela poſé, il peut arriver deux cas.

Premier cas. Si eR eſt $=$ ou $>$ que la plus grande des Ordonnées négatives lh, il eſt évident que la tranche diſtante de AD, d'une quantité égale à RX, ſera preſſée ſuivant BL avec une force égale à hX. Il faut donc ajoûter cette force avec celles qui preſſent les tranches compriſes depuis X juſqu'en S, & qui, abſtraction faite de l'adhérence des parties, ſont repréſentées (*art. 26.*) par les Ordonnées πr. Donc ſi la ſurface inférieure du Fluide eſt, par exemple, VN au lieu de ZC, la preſſion que ſouffriroit cette ſurface, en n'ayant égard qu'à la force d'adhérence appliquée en AB, ſeroit Yy. Mais comme la ſurface VN eſt preſſée en ſens contraire par une force d'adhérence égale à celle de AB, c'eſt-à-dire $=$ à eR, il s'enſuit que la preſſion ſe réduira à ϖy. D'où l'on voit que ſi ϖy n'eſt pas $= o$, il n'y aura point équili-

bre, puisqu'il n'y a rien qui soutienne cette pression. Elle sera de g vers L ou de g vers B, selon que ϖ sera positive ou négative.

Second cas. Si eR est moindre que lh, alors il ne peut plus y avoir d'équilibre. Car s'il y avoit un fond en AD, ce fond seroit pressé avec une force égale à Xh *, c'est-à-dire en général par une force proportionnelle à la distance de la ligne Ry au point h, par où passe la plus grande des Ordonnées négatives de la Courbe $euhs$.

Comme dans ce cas la force d'adhérence appliquée en AB est détruite, on voit aisément, que la surface inférieure du Fluide, que je suppose être VN, seroit comprimée par une force $= \varphi y$, s'il n'y avoit point d'autre force d'adhérence que celle qui est appliquée en AD. Mais comme la surface VN est pressée par une force égale & contraire, la pression exercée sur cette surface sera $\varphi y - eR$, & sera positive, ou nulle, ou négative selon que φy sera $>$ ou $=$ ou $<$ eR.

48. *Coroll.* Donc si un Fluide $ADZC$, renfermé dans un vase qui n'a point de fond, n'est pas en équilibre, abstraction faite de l'adhérence de ses parties, il faut distinguer si le défaut d'équilibre vient de ce qne l'Aire $adnmobc$ n'est pas $= 0$, ou s'il vient seulement de ce que la Courbe $euhs$ a des Ordonnées négatives. Dans le premier cas, l'adhérence des parties ne peut rétablir l'équilibre. Dans le second cas, elle le rétablira, pourvu que eR soit $=$

* Dans le cas dont il s'agit ici, la ligne RY doit couper lh en quelque point : ce qui est aisé à imaginer sans avoir besoin d'une nouvelle figure.

ou > que la plus grande *lh* des Ordonnées négatives de la Courbe *euhs*.

II.

49. Propos. I. *Si l'adhérence des particules du Fluide* ADZC *eſt ſuppoſée venir de la ſeule inégalité de ces particules, & que les différentes tranches* FG *de ce Fluide ſoient animées par des forces accélératrices* kf, *telles, que le Fluide fut reſté en équilibre, abſtraction faite de l'adhérence de ſes parties; je dis qu'il demeurera encore en équilibre, ſi on a égard à cette adhérence.*

Cette vérité eſt ſi claire, ce me ſemble, qu'elle n'a pas beſoin de démonſtration; l'adhérence des parties eſt ici une force ſimplement paſſive, qui ne ſauroit rompre un équilibre déja ſubſiſtant.

50. Propos. II. *Si l'adhérence des particules du Fluide provient de la ſeule inégalité de ces parties, & que chaque tranche* FG *ſoit animée par une force accélératrice repréſentée par l'Ordonnée* kf *de la Courbe* dinfmob; *je dis que tous les points d'une tranche quelconque* FG, *ſont preſſés ſuivant* KL *par une force proportionnelle à l'Aire* kfmocb.

En effet, imaginons pour un moment que la partie *ADGF* du Fluide eſt anéantie, & que *FG* eſt un plan immobile auquel la ſurface *FG* du Fluide ſoit adhérente, comme elle l'étoit au Fluide *ADGF*: il eſt évident qu'on pourra ſubſtituer à la force d'adhérence paſſive qui provient de l'inégalité des parties, une force active appliquée en *ZC*, & dont la preſſion ſur *FG* & ſur toutes

les autres tranches, ſoit égale à la force qui eſt néceſſaire pour ſéparer les particules, force qui doit être donnée, & qu'on peut repréſenter par une Aire ou ſurface conſtante *B*. Cela poſé, il eſt certain que *FG* (*B* — *kfmocb*) ſeroit la preſſion que ſouffriroit *FG*. Mais *FG*. *B* eſt la force qui retient la ſurface *FG*. Donc *FG* × (*kfmocb*) eſt la force qui tend à faire deſcendre cette ſurface.

51. *Coroll.* On voit par-là que le Theorême démontré dans l'article 14. pour le cas où le vaſe qui renferme le Fluide, a un fond, & où une tranche quelconque eſt preſſée de haut en bas par l'action du Fluide inférieur; on voit, dis-je, que ce Theorême eſt vrai auſſi pour le cas où le vaſe n'a point de fond, & où une tranche eſt tirée de haut en bas par l'action du Fluide inférieur.

52. PROPOS. III. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'art.* 50. *je dis qu'il eſt néceſſaire pour l'équilibre, que l'Aire* adnmobc *ſoit zero, & que la Courbe* euhs *n'ait aucune Ordonnée négative plus grande que la ligne* eR *qu'on ſuppoſe ici repréſenter la ſurface* B, *qui exprime la force d'adhérence des parties.*

Car ſoit *m* le point où l'Aire *adinfm* a la plus grande valeur négative poſſible ; tous les points de la tranche du Fluide qui répond au point *m*, ſeront tirés ſuivant *ma* avec une force proportionnelle à l'Aire *mfnida*. Ces mêmes points ſeront de plus tirés ſuivant *mb* avec une force égale à *mzobc*. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut 1°. que ces deux forces ſoient égales : donc *mzobc* = *mfnida* & *adinmobc* = 0. 2°. Il faut que chacune

de ces forces ne soit pas plus grande que la force d'adhérence *B*. Donc &c.

53. *Remarque*. Quelques Lecteurs croiront peut-être qu'il suffit que l'Aire *mzobc*, où son égale *msnida* ne soit pas $> \frac{B}{2}$; parce qu'ils pourront imaginer qu'il suffit que la tranche qui répond à *m*, soit tirée à la fois en haut & en bas avec une force un peu plus grande que $\frac{B}{2}$ pour pouvoir être divisée. Mais on seroit dans l'erreur de penser ainsi : car quand deux puissances égales & contraires tendent à séparer deux corps l'un de l'autre, il faut précisément la même force à chacune de ces puissances que si l'autre étoit anéantie, & qu'on lui substituât un obstacle immobile, parce que chacune des puissances fait par rapport à l'autre l'effet d'un pareil obstacle.

54. *Coroll.* Il est évident que les propositions démontrées *art.* 47 & 48 pour la premiére hypothese sur la cause de l'adhérence, sont encore vrayes dans la seconde hypothese.

III.

55. Si l'adhérence des particules est causée à la fois par l'inégalité des parties & par une force active appliquée aux deux surfaces, en ce cas on prouveroit en combinant les Principes que nous venons d'établir, que si on nommoit *A* la force appliquée aux deux surfaces, & *B* la force qu'il faudroit pour désunir les parties, in-

dépendamment de la force A, il faudroit pour l'équilibre, que l'Aire $adnmobc$ fut $= 0$, & que $mzobc$ ou ſon égale $mfnida$ ne fût pas $> B + A$.

CHAPITRE V.

De l'équilibre des Fluides, dont la ſurface ſupérieure eſt Courbe.

56. LA Théorie de l'équilibre des Fluides dont la ſurface ſupérieure eſt Courbe, eſt d'une toute autre difficulté que celle de l'équilibre des Fluides dont la ſurface eſt plane, & dont les parties ſont animées par une peſanteur dont la direction eſt conſtante. Elle eſt d'ailleurs fort importante par le rapport qu'elle a avec la queſtion de la Figure de la Terre. M. *Hughens* en traitant cette matiére, a pris pour principe d'équilibre la perpendicularité de la peſanteur à la ſurface. M. *Newton* s'eſt ſervi de Principe de l'équilibre des colonnes centrales : Mrs *Bouguer* & *de Maupertuis* ont fait voir de plus, qu'il étoit néceſſaire pour qu'il y eût équilibre, que les Principes de Mrs *Hughens* & *Newton* euſſent lieu à la fois. Enfin, ſelon M. *Clairaut*, il faut qu'en général, une partie quelconque de Fluide qu'on imagineroit renfermée dans un Tuyau PQE (Fig. 19) aboutiſſant à la ſurface, ſoit en équilibre ; ou, ce qui revient au même, comme M. *Clairaut* le démontre, il faut que ſi $\pi\epsilon q$, Nns, &c. (Figure 20)

ſont les tranches ou couches auſquelles la peſanteur eſt perpendiculaire, il faut, dis-je, en imaginant ces couches infiniment proches, que l'épaiſſeur de chaque couche en un point quelconque, ſoit en raiſon inverſe de la peſanteur qui agit en ce point. (M. *Clairaut* appelle *Couches de niveau*, les Couches auſquelles la peſanteur eſt perpendiculaire.)

Les différentes Loix d'équilibre, découvertes par les Savans Geométres que nous venons de citer, paroiſſent être les ſeules auxquelles nous devions nous arrêter pour le préſent, juſqu'à ce que l'Expérience,ou une connoiſſance plus parfaite de la nature des Fluides nous ait perſuadé qu'il n'y en a point d'autres, ou peut-être nous en faſſe découvrir d'autres.

57. Me ſeroit-il permis de propoſer là-deſſus quelques conjectures ? on ſait, & nous l'avons prouvé, que la direction de la peſanteur doit être perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Mais ne pourroit-il pas être néceſſaire que la peſanteur à la ſurface obſervât une certaine Loi, ou toutes ſortes de Loix lui ſeroient-elles indifférentes? Quand les particules d'un Fluide dont la ſurface eſt convexe, ſont preſſées perpendiculairement à cette ſurface; on ne peut nier, ce me ſemble, qu'elles n'ayent une certaine action pour ſe ſoulever les unes les autres, & il eſt néceſſaire que chacune des particules réſiſte également à cette action. Auſſi nous avons vû ci-deſſus (*art.* 5.), que ſi un Fluide eſt renfermé dans un vaſe percé de pluſieurs ouvertures, toutes les parties du Fluide contiguës à ces ouvertures,

ouvertures, doivent être également preſſées pour qu'il y ait équilibre. Lorſque la peſanteur agit non-ſeulement à la ſurface, mais au-dedans de la maſſe Fluide, la couche infiniment proche de la ſurface, doit être également preſſée en tous ſes points, comme M. *Clairaut* le démontre. C'eſt pour cela que la diſtance d'un point de la ſurface au point correſpondant de la couche infiniment proche, doit être en raiſon inverſe de la peſanteur à la ſurface. Mais ſi tous les points de la ſeconde couche doivent être également preſſés par l'action extérieure des parties qui ſont au-deſſus d'elle, ne pourroit-on pas inférer de-là, que tous les points de la ſurface doivent auſſi être également preſſés par la peſanteur qui eſt inhérente à ſes parties, c'eſt-à-dire, que la peſanteur de toutes ces particules doit être égale? En effet, ſi toutes les parties d'une couche à laquelle la peſanteur eſt perpendiculaire, doivent être également preſſées par le poids du Fluide ſupérieur; ce ne peut être, ce me ſemble, qu'afin qu'une des particules ne tende pas à ſe mouvoir avec plus de force que l'autre. Or s'il étoit néceſſaire pour l'équilibre, que toutes les parties d'une couche de niveau tendiſſent à ſe mouvoir avec une égale force, la peſanteur devroit être égale à tous les points de la ſurface.

58. Quand il ſeroit prouvé que la peſanteur dût être la même à tous les points de la ſurface, cette condition ne ſuffiroit peut-être pas encore, pour que la ſurface fut en équilibre. Voici la raiſon qui m'oblige à penſer ainſi. Soient pluſieurs Globules égaux *A*, *B*, *C*; &c. (Fig. 21).

disposés les uns auprès des autres de telle maniére, que leurs centres *A*, *B* &c. soient dans le contour d'un Polygone à angles très-obtus, & supposons que chacun de ces Globules, comme *B*, soit poussé par une force dont la direction *BN*, divise l'angle *ABC* en deux également; je dis qu'il ne peut y avoir d'équilibre entre tous ces Globules, à moins que la force de chacun ne soit en raison du Sinus de l'angle *KBC*. (On peut démontrer aisément cette proposition, en remarquant que la force du Corps *B* suivant *BN* doit se décomposer en deux autres forces suivant *BA* & *BC*, qui soient l'une & l'autre égales aux forces contraires des Corps *A* & *C* suivant *AB* & *CB*.) Or de-là il s'ensuit, que si ces Globules sont infiniment petits, il faut que la pesanteur de chacun soit en raison inverse du rayon de la développée de la Courbe *ABCD*, sur laquelle sont placés leurs centres.

Si cette derniére Loi avoit lieu dans les Fluides, c'est-à-dire, si les particules des Fluides devoient être considerées comme de petites boules, & si en même-tems la pesanteur devoit être égale à tous les points de la surface, il en résulteroit cette proposition assez singuliére, qu'il n'y auroit que les Fluides à surface plane ou sphérique, qui pussent être en équilibre. Mais sans examiner quelles pourroient être les conséquences de ce Principe, je crois devoir terminer des Réflexions, que je n'ai fait, pour ainsi dire, que hazarder ici, & qui seront toujours assez utiles, si elles peuvent nous procurer sur cette

matiére des éclairciſſemens de la part des Savans qui l'ont le plus approfondie.

J'ajouterai ſeulement, qu'un des meilleurs moyens qu'on pût employer, ce me ſemble, pour décider cette queſtion au moins en partie, ſeroit de bien démontrer que la Figure de la Terre trouvée par la Théorie, doit s'accorder avec celle qu'on lui trouve par les meſures actuelles. Car on ne ſauroit douter que la Terre ne ſoit applatie vers les Pôles, après les opérations ſi exactes qui ont été faites au Nord, opérations confirmées par celle qu'a faite M. *Caſſini de Thury* en 1740, & de laquelle il a conclu l'applatiſſement de la Terre, ſans égard pour pluſieurs meſures précedentes, d'où réſultoit le contraire, & qu'apparemment il n'a pas cru aſſez exactes. Or ſi la Terre eſt applatie, & ſi la peſanteur, comme on l'a prouvé par d'autres Expériences, va en augmentant de l'Equateur au Pôle; ſi de plus, cette peſanteur eſt celle qu'auroient eu les particules de la Terre, ſuppoſées Fluides, & en équilibre entr'elles; on doit en conclure, que pour qu'un Fluide ſoit en équilibre, il n'eſt pas néceſſaire que la peſanteur à la ſurface ſoit en raiſon inverſe du rayon Oſculateur en chaque point, ni qu'elle ſoit égale à tous ces points, ni enfin que la ſurface ſoit ſphérique.

De l'équilibre d'un Corps solide quelconque dans un Fluide, dont les parties sont animées par une pesanteur quelconque.

THEORÊME VIII.

59. *Si une masse de Fluide* PpE (Fig. 22) *est en équilibre, & qu'on imagine que le Fluide renfermé entre deux Couches de niveau infiniment proches* AFK, afq, *vienne à se durcir tout-à-coup, ses parties conservant la même pesanteur & la même densité, je dis que l'équilibre subsistera.*

Car ayant tiré à volonté deux paralléles infiniment proches gf, hq & mené les lignes Ff, $q\varphi$ perpendiculaires à fq, & Gg, hH perpendiculaires à gh, il est clair (soit que les remarques faites *art.* 57 & 58, ayent lieu ou non) que la pesanteur en F suivant Ff, sera à la pesanteur en G suivant Gg, comme Gg à Ff. D'où il s'ensuit, que les pesanteurs des masses $Ffq\varphi$, $GghH$, suivant Ff, Gg, sont entr'elles comme fq à gh; donc les efforts suivant fg, gf, résultans de ces pesanteurs, seront entr'eux comme $fq \times \frac{fl}{fq}$ à $\frac{gh \times gu}{gh}$, c'est-à-dire, qu'ils seront égaux. On prouvera de même que les efforts suivant fZ, gV, sont détruits par des efforts contraires en Z & en V. D'où l'on voit que la masse proposée sera en équilibre.

COROLLAIRE.

60. Donc si on imagine que toute la masse de Fluide renfermée par la couche ABK vienne à se durcir, ses

parties conservant la même densité & la même pesanteur qu'auparavant, cette masse sera en équilibre, puisqu'on peut la regarder comme composée d'une infinité de couches de niveau, dont chacune en particulier sera en équilibre.

THEOREME IX.

61. *Si une masse de Fluide* PpE *est en équilibre, & qu'il s'en durcisse une partie quelconque, les particules durcies conservant la même pesanteur & la même densité, je dis que l'équilibre subsistera.*

Car 1°. puisque la masse solide renfermée par la couche de niveau *ABK* seroit en équilibre, (*art.* 60.) elle seroit encore en équilibre, étant augmentée ou diminuée d'une quantité infiniment petite *ACBD*; en effet, si la masse *ADK* est augmentée de la portion *ACDB*, il est évident qu'une force égale au poids de *ACDB* tend à pousser cette masse en embas. Mais comme la pression de la surface *ACB* est diminuée dans ce même cas du poids de *ACDB*, & qu'auparavant, cette surface étoit pressée également partout, il s'ensuit qu'une force égale au poids de *ACDB* tend à mouvoir en enhaut la masse *ADK*; donc cette masse tend à se mouvoir également en deux sens contraires: donc elle doit rester en repos. On prouvera de même, que si la masse *ADK* étoit diminuée de la portion *ACDB*, elle tendroit à se mouvoir en enhaut avec une force égale, à celle avec laquelle le Fluide la pousseroit en enbas. Donc &c.

2°. En augmentant ou diminuant ainſi, toujours infiniment peu, la maſſe *ADK* ; on peut la changer en une maſſe de telle figure qu'on voudra, & on prouvera toujours que les changemens infiniment petits qu'on fera à chaque inſtant, ne troubleront point l'équilibre. Donc &c.

CHAPITRE VI.

De l'équilibre des Fluides élaſtiques.

62. ON appelle *Fluide élaſtique* celui qui a la propriété de ſe comprimer & de ſe dilater, c'eſt-à-dire, de contenir un même nombre de parties ſous un volume, tantôt moindre, tantôt plus grand.

L'air eſt de tous les Fluides que nous connoiſſons, celui dont la vertu élaſtique eſt le plus ſenſible. Nous ignorons au reſte quelle en eſt la cauſe : auſſi ne la regarderons-nous ici que comme un fait.

C'eſt une vérité reconnue de tout le monde, qu'un Corps élaſtique fait en tout ſens un effort égal pour ſe dilater, que la vertu élaſtique de ce Corps agit également en tout ſens. Cette propriété générale combinée avec les propriétés particuliéres des Fluides, nous conduit à trouver les Loix de l'équilibre & de la preſſion des Fluides élaſtiques, comme on le verra dans les articles ſuivans.

Loix générales de l'équilibre & de la pression des Fluides élastiques.

63. Imaginons d'abord un ressort AB, (Fig. 23) appuyé d'un côté contre un plan inébranlable DN, & comprimé de l'autre par une puissance ou poids A, de maniére qu'il soit réduit à aB; il est clair que les points B, a, feront un effort égal, l'un contre le plan suivant BC, l'autre en sens contraire suivant aA. Or ce dernier effort est précisément égal à la pression du poids A. Donc la pression en B suivant BC est égale à la pression de ce même poids : c'est-à-dire que le point B du plan est comprimé, comme il le feroit immédiatement par le poids A.

64. Qu'on ôte ensuite l'appui DN, & qu'on imagine un nouveau ressort BC égal & semblable au ressort AB, & appuyé contre un plan fixe nd ; je dis que le point C sera pressé avec une force égale à celle du poids A, & que chacun des ressorts AB, BC, sera comprimé d'une quantité égale à aB, ensorte que le point B descendra au point β, tel que $C\beta = aB$, & le point A au point α, tel que $\beta\alpha = aB$. Car il est évident que l'effort du point C contre le plan, doit être égal à l'effort du point β suivant $\beta\alpha$, ou, ce qui est la même chose, à l'effort du point β suivant βC, lequel est égal à l'effort du point a suivant aA : or ce dernier effort est égal à l'effort du poids A, qui dans le premier cas étoit égal à l'effort du point a, lorsqu'il n'y avoit qu'un seul ressort. De toutes ces égalités combinées, il s'ensuit que le point C est pressé par

une force égale à celle du poids A, & que l'on a $C\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\alpha = Ba$.

65. *Donc en général, quel que soit le nombre des ressorts comprimés par une seule & même puissance, la pression qu'ils exerceront contre un obstacle immobile, sera égale à la pression qu'exerceroit immédiatement contre cet obstacle la puissance par laquelle ils sont comprimés; & l'espace dans lequel ces ressorts comprimés seront réduits, sera à l'espace auquel un seul de ces ressorts seroit réduit par la même puissance, comme le nombre des ressorts est à l'unité.*

66. Présentement, si l'on imagine deux ressorts AB, BC, (Fig. 24) appuyés contre un plan DN, dont le premier soit comprimé par une puissance ou un poids A, comme ci-dessus, & le second soit comprimé en B par une nouvelle puissance ou un nouveau poids, égal, ou non, au poids A; je dis que le point C sera pressé avec un effort égal à celui des deux poids A, B, pris ensemble; que le ressort AB sera comprimé d'une quantité ab précisément égale à aB, & que le ressort BC sera réduit en un espace bC moindre que ab. Car l'effort du point C contre le plan, ou ce qui est la même chose, l'effort du point b suivant ba, est égal à l'effort de la puissance B appliquée en b, plus à l'effort du point a suivant aA, lequel est égal à l'effort de la puissance A. Donc le point b ou C est comprimé par une force égale à $A + B$, & le point a par une force égale à A. Donc &c.

[Il n'est pas aisé de déterminer le rapport de ab à bC. Il faudroit savoir, pour cela, de combien un ressort se comprime

comprime par un poids donné. Nous entrerons ci-après dans un plus grand détail là-dessus.]

67. Donc en général, *s'il y a tant de ressorts qu'on voudra, chargés par un nombre quelconque de puissances ou de poids, la pression de ces ressorts contre un obstacle immobile, sera toujours égale à la somme de ces puissances ou de ces poids réunis.*

68. Qu'on détruise maintenant une partie des poids & des ressorts supérieurs, & qu'on substitue un obstacle fixe & insurmontable à la place du premier des poids restans; il est évident que la compression du point C restera toujours la même, puisque l'état & la compression de tous les ressorts supérieurs n'a point changé.

69. Ceci bien entendu, imaginons dans un vase Cylindrique $CDFE$, (Figure 25) un Fluide homogene $ABFE$, lequel devenant tout-à-coup élastique, soit comprimé en $abFE$ par une cause quelconque. Soit GKH la Courbe des densités Gh, KZ, Hm &c. de ses différentes tranches, MLN la Courbe des forces accélératrices eM, fL &c. qu'on peut supposer produire la compression de chaque tranche; il est évident qu'en nommant ef, x, fL, φ, KZ, δ, on aura la pression de $EF = \int\varphi\delta dx$.

70. En général, de quelque figure que soit le vase $CDFE$ (Fig. 26) il suit des *art.* 67 & 14, que le Fluide réduit en $abFE$, pressera le fond EF avec une force égale à $\int\varphi\delta dx$, c'est-à-dire avec une force précisément égale à celle dont ce fond seroit pressé, si le Fluide $abFE$

n'avoit aucun ressort, & que ses différentes tranches eussent la densité δ, & fussent animées par les forces φ.

71. Donc en général, *si un vase quelconque* CDFE *contient un Fluide élastique* abFE, *dont les parties soient animées par des forces accélératrices qui en causent la compression, le fond de ce vase est pressé de la même maniére, toutes choses d'ailleurs égales, que si le Fluide restant dans le même état, étoit supposé tout-à-coup privé de ressort; & il faudra pour soutenir le vase, la même puissance qu'il faudroit, si le Fluide étoit sans ressort, c'est-à-dire* (art. 14) *une puissance égale au poids du Fluide.*

72. Il y a cependant cette différence entre le Fluide supposé élastique & le Fluide supposé sans ressort, que si une partie quelconque $ab\beta\alpha$ (Fig. 25) vient à se geler, ou à être séparée de l'autre par quelque obstacle insurmontable $\alpha\beta$, la pression du fond EF diminue quand le Fluide est sans ressort, au lieu qu'elle demeure toujours la même (*art.* 68.) si le Fluide est élastique.

Du reste, il faut dans l'un & l'autre cas la même puissance pour soutenir le vase rempli du Fluide $\alpha\beta EF$; car 1°. quand le Fluide est sans ressort, il ne faut pour soutenir le vase $EF\beta\alpha$ chargé du Fluide $EF\beta\alpha$ qu'une puissance égale au poids de ce même Fluide $EF\beta\alpha$. 2°. Quand le Fluide est élastique, la portion rt (Fig. 27) du vase est pressée suivant Tt avec une force proportionnelle au poids qu'auroit le Fluide $TRrt$; mais le point V est en même-tems pressé suivant VT, avec une force égale au poids qu'auroit le Fluide $TRuV$. Donc &c.

De la pression d'un Fluide élastique, dont les parties sont comprimées par leur seul poids.

73. Soit un vase de figure quelconque *CDFE* (Fig. 26) rempli d'un Fluide pesant & homogene *ABFE*, lequel vienne tout-à-coup à se comprimer par la seule gravitation des parties supérieures sur les inférieures, & soit réduit à l'espace *abFE*, il est évident

1°. Que les particules du Fluide seront d'autant plus comprimées & d'autant plus denses, qu'elles seront plus proches du fond *EF*.

2°. Que la densité à la surface *ab* sera la même que celle du Fluide avant la compression, puisque les parties de cette surface *ab* ne sont comprimées que par un poids infiniment petit.

3°. Si on nomme comme dans l'*art.* 69. hZ, x, δ la densité variable KZ de chaque tranche OP, & p la pesanteur constante qui anime toutes les tranches, on aura la pression du fond $EF = \int \delta p\, dx$, ou $p \times EF \times$ l'Aire $hGHm$.

COROLLAIRE I.

74. De-là il s'ensuit que la pression du fond *EF* dans le cas où le Fluide est sans ressort & dans son état naturel *ABFE*, est à la pression de ce fond, lorsque le Fluide est élastique & comprimé en *abFE*, comme le rectangle *QRVm* à l'Aire *hGHm*.

COROLLAIRE II.

75. Donc 1°. *si le vase est un rectangle comme dans la* Fig. 25, *le fond* EF *sera comprimé par le Fluide supposé élastique, comme il l'étoit par le Fluide supposé sans ressort.* Car la quantité de Fluide contenue en $abFE$, est égale à celle qui est contenue en $ABFE$. Or la premiére est $= EF \times \int \delta dx = EF \times$ l'Aire $hGHm$. La seconde est $EF \times QRVm$. donc $QRVm = hGHm$. Donc &c.

2°. *Si le vase va en augmentant de largeur de haut en bas* (Fig. 26) *le fond* EF *sera moins pressé par le Fluide élastique, qu'il ne l'étoit par le Fluide sans ressort.* Car soient prises dans les Fluides $ABFE$, $abFE$ deux portions $EFTS$, $EFPO$, qui contiennent une égale quantité de matiére, & deux portions infiniment petites $OPpo$, $STts$, qui en contiennent aussi une égale quantité, on aura $Xx \times ST \times YX = OP \times ZK \times Zz$. Donc puisque (*hyp.*) $ST < OP$, on aura $Xx \times YX > ZK \times Zz$. Donc la somme de tous les rectangles $Xx \times YX$ sera plus grande que la somme de tous les rectangles $ZK \times Zz$, c'est-à-dire le rectangle $QRVm > hGHm$. Donc &c.

3°. *Si le vase alloit en diminuant de largeur de haut en bas, le fond seroit plus pressé par le Fluide élastique, qu'il ne le seroit par le Fluide sans ressort.* Cela se démontre d'une maniére semblable : car pour lors $ST > OP$, rend $QRVm < hGHm$.

COROLLAIRE III.

76. La puiſſance néceſſaire pour ſoutenir le vaſe, eſt la même dans le cas du Fluide élaſtique & dans celui du Fluide ſans reſſort, puiſque dans l'un & l'autre cas elle eſt égale au poids du Fluide, comme il eſt aiſé de le faire voir.

REMARQUE.

77. Si la compreſſion du Fluide dans l'eſpace *abFE* étoit cauſée non-ſeulement par le poids de ce Fluide, mais encore par quelque autre force ; alors il faudroit avoir égard à cette force particuliére dans la détermination de la preſſion du fond *EF*. Par exemple, ſi le vaſe étoit Cylindrique, la preſſion du fond *EF* ſeroit égale au poids du Fluide augmenté de cette même force : auſſi il ſeroit néceſſaire d'employer dans ce dernier cas, une puiſſance plus grande que le poids du Fluide, pour ſoutenir le vaſe.

De-là il s'enſuit que la *cauſe immédiate* de la preſſion qu'exercent les Fluides élaſtiques, eſt la vertu élaſtique de ces Fluides, & non leur poids; on ne doit donc attribuer la ſuſpenſion du mercure dans le Barométre au poids de l'air, qu'en tant que ce poids eſt cauſe de la compreſſion de l'air. Si l'air demeure de même poids, & que la compreſſion de ſes parties vienne à augmenter ou à diminuer par quelque cauſe accidentelle, alors le mercure deſcendra ou montera dans le Barométre,

quoique le poids de l'air ne ſoit point augmenté. C'eſt donc à l'augmentation ou à la diminution du reſſort de l'air qu'on doit attribuer les variations du Barométre, plutôt qu'à l'accroiſſement ou à la diminution du poids de l'air ; car ſelon toutes les apparences, le poids de l'air n'eſt pas la ſeule cauſe de la compreſſion des parties de ce Fluide ; ſon effet eſt modifié par différentes cauſes, comme par le plus ou moins de chaleur &c.

Recherches ſur la Loi de la denſité, dans les parties d'un Fluide élaſtique qui ſe comprime par ſon propre poids.

78. Soit AB (Figure 28) une colonne de Fluide dont toutes les parties ayent une égale denſité repréſentée par la ligne conſtante $AF = n$, enſorte que le rectangle $AFGB$ exprime la maſſe de cette colomne. Suppoſons préſentement que ce Fluide, devenu élaſtique, & comprimé par ſon propre poids, ſoit réduit à l'eſpace aB, on demande de la Loi de la denſité depuis A juſqu'en B, denſité qui doit (*art. 66.*) être croiſſante.

Imaginons la Courbe ACM (Fig. 29) dont les abſciſſes AD repréſentent l'eſpace qu'occupoit une portion quelconque du Fluide avant d'être comprimée, & dont les Ordonnées DM repréſentent l'eſpace dans lequel le Fluide AD a été réduit par la compreſſion ; je dis, que le poids ſeul étant ſuppoſé la cauſe de la compreſſion, cette Courbe ACM ſera concave vers AD, & qu'elle coupera l'Axe AB en A ſous un Angle de 45 degrés. Car 1°. le poids en A étant infiniment petit, la portion

infiniment petite AB ne fera qu'infiniment peu comprimée, & BC ne differera de AB que d'un infiniment petit du fecond ordre. 2°. L'efpace nm dans lequel la portion Dd eft réduite, fera d'autant moindre que AD fera plus grand.

79. Soit $AD = t$, $DM = x$, z la denfité correfpondante à x, $Dd = dt$ & conftant, on aura $\frac{z}{n} = \frac{dt}{dx}$, & $nt = \int z\,dx$: il ne nous refte plus qu'à chercher quel doit être le rapport, au moins approché, entre le poids $nt = \int z\,dx$ de la colonne AD, & la compreffion de la petite particule Dd en nm.

Les raisonnemens de ce article et le suivant ont donné lieu à la même M. d'Alem d'y faire quelque remarques très-judicieuses. Voy. ses Opusc. Math. Vol. V. pag. 145 etc.

Pour cela, nous imaginerons d'abord un reffort PR, (Fig. 30) qui occupant l'efpace PR dans fon état naturel, foit appuyé contre un obftacle fixe R, & nous cherchérons l'Equation, au moins approchée, de la Courbe PT dont les Ordonnées ST repréfentent la force avec laquelle le reffort tend à fe dilater quand il eft réduit à occuper les efpaces correfpondants SR. Il eft clair 1°. que fi le reffort eft réduit par la force ST à n'occuper que l'efpace SR, & qu'on veuille le comprimer de nouveau, & le réduire à n'occuper que l'efpace RV, il faudra employer une nouvelle force. 2°. Que cette force tu, employée à comprimer le reffort SR dans un efpace donné SV, fera d'autant plus grande, que le reffort SR fera déja plus comprimé. 3°. Que la force $p\pi$ néceffaire pour comprimer le reffort de la quantité Pp, fera infiniment moindre que tu, néceffaire pour le comprimer de

la quantité $SV = Pp$. 4°. Qu'il y a un eſpace QR, qui eſt le plus petit auquel le reſſort puiſſe être réduit, & que pour le comprimer davantage, il faudroit une force infinie, d'où il s'enſuit que l'Ordonnée QO doit être infinie. 5°. De plus, ſi l'eſpace QR, le plus petit que le reſſort comprimé puiſſe occuper, peut être regardé comme infiniment petit par rapport à l'eſpace RP qu'il occupe dans ſon état naturel, c'eſt-à-dire ſi le reſſort eſt capable d'une très-grande compreſſion, comme ſont les Fluides élaſtiques que nous connoiſſons; on pourra ſuppoſer que RQ eſt nulle ou zero, & qu'ainſi l'Ordonnée QO tombe en R. 6°. Enfin nous éprouvons par l'Expérience, que l'air que nous reſpirons ici bas, & qui eſt déja fort comprimé par rapport à ſon état naturel, ſe comprime en raiſon des poids dont il eſt chargé. D'où il s'enſuit qu'en ſuppoſant RS aſſez petite par rapport à RP, il faut que ST ſoit à peu près en raiſon inverſe de RS.

Donc ſi on nomme RP, a, SR, u, ST, y, la valeur de y en u, doit être telle 1°. que u décroiſſant, y, & ſa différence croiſſe. 2°. Que $a - u$ infiniment petite du premier ordre, rende y infiniment petite du ſecond. 3°. Que $u = 0$ rende $y = \infty$. 4°. Enfin, que u ſuppoſée très-petite par rapport à a, rende y à peu près en raiſon inverſe de u.

Or ſi on fait $y = \frac{(a-u)^2}{aa} + \frac{(a-u)^2}{au}$ cette Equation ſatisfait évidemment à toutes ces conditions. C'eſt pourquoi, comme elle eſt d'ailleurs extrêmement ſimple, nous

nous la prendrons pour l'Equation approchée que nous cherchons.

Mettant donc à préſent dt pour a, dx pour u, & nt ou $\int z\,dx$ pour la force comprimante y, nous aurons $\int z\,dx = (\frac{dt - dx}{dt})^2 + \frac{(dt - dx)^2}{dt\,dx}$. Différentions cette Equation en prenant dt conſtante, & mettons enſuite pour dt ſa valeur $\frac{z\,dx}{n}$, & pour ddx ſa valeur $- \frac{n\,dt\,dz}{zz}$ ou $- \frac{dz\,dx}{z}$; & nous aurons cette Equation toute ſéparée entre les x & z; $dx = \frac{2n.(z - n)\,dz}{z^4} + \frac{(z - n)^2\,dz}{n z^3} + \frac{2(z - n)\,dz}{z^3}$.

Si on vouloit prendre les x, non depuis le ſommet, mais depuis le point le plus bas du Fluide, il faudroit mettre $-dx$ pour dx dans l'Equation précedente.

REMARQUE I.

80. L'Equation que nous avons donnée ci-deſſus entre y & u, n'ayant été déduite que des propriétés générales des reſſorts comprimés, & une infinité d'Equations pouvant renfermer ces mêmes propriétés, on voit que l'Equation entre les x & les z que nous venons de donner n'eſt qu'hypothetique, & ne contient que les propriétés générales du rapport entre les x & les z.

On pourroit même faire quelques objections contre le

choix que nous avons fait de l'Equation $y = \frac{(a-u)^2}{a^2} + \frac{(a-u)^2}{au}$. Car, on pourroit dire, que quand le ressort passe de l'état de compression à celui de dilatation, sa force dilatative devient contractive, & que quand le ressort ne peut plus se comprimer, sa force est imaginaire : qu'ainsi l'Ordonnée y doit devenir imaginaire quand u est moindre que QR, & négative quand $u > RP$: conditions qui ne sauroient convenir à l'Equation proposée entre y & u.

Mais en premier lieu, quand on formeroit une Equation qui renfermeroit ces nouvelles conditions, la véritable Equation n'en seroit pas plus déterminée pour cela, puisque l'Equation qu'on auroit, ne seroit formée que sur des propriétés qui lui seroient communes avec une infinité d'autres ; & l'Equation que nous avons proposée auroit toujours l'avantage de la simplicité. De plus, les idées abstraites de la Geométrie ne doivent pas toujours être transportées dans la Physique, & quoique par exemple la force devienne contractive, lorsque $u > a$, ce n'est pas à dire que son expression doive nécessairement être telle, qu'en faisant $u > a$ elle devienne négative. En effet, si on suppose, comme nous l'avons fait, que la force y soit infiniment petite du second ordre, lorsque le ressort est comprimé de la quantité PV infiniment petite du premier, supposition qui n'a rien que de très-plausible : il s'ensuivra que $a - u$ étant infiniment petite, on aura

$y = \frac{(a-u)^2}{a^2}$. Or, cela posé, $u > a$ ne rendroit pas y négative.

REMARQUE II.

81. Si dans l'Equation précedente entre les x & les z, on suppose $n = 1$, & nul par rapport à z, on aura $dx = \frac{dz}{z}$, ou en faisant commencer les abscisses x au point le plus bas, $-dx = \frac{dz}{z}$ & $x = -\log. z$. On peut donc prendre cette Equation pour l'expression du rapport des densités, lorsque le Fluide est fort comprimé par rapport à son état naturel.

Si au lieu de prendre $y = \frac{(a-u)^2}{aa} + \frac{(a-u)^2}{au}$ on eut pris $y = \frac{aa}{u}$, c'est-à-dire la force comprimante en raison de la densité, on auroit trouvé $dx = \frac{dz}{z}$. c'est l'Equation des densités en les supposant proportionnelles aux poids comprimans. Mais il faudroit dans cette hypothese, que l'origine des x fut à une hauteur infinie, & qu'à cette hauteur la densité fut zero. Aussi M. *Varignon* a-t'il déja fait voir (*Mém. Acad.* 1716.) que la Geométrie se refusoit en quelque sorte à cette hypothese.

Au reste, l'Equation $dx = \frac{dz}{z}$, a lieu non-seulement lorsqu'on suppose la densité proportionnelle au poids, c'est-à-dire $\int z\, dx = z$, mais encore quand on suppose

$\int z\,dx + A = z$, c'eſt-à-dire la denſité proportionnelle au poids comprimant augmenté d'un poids conſtant, & cette derniére hypotheſe n'a rien qui répugne, l'origine des x pouvant être dans ce cas à une hauteur finie, & la denſité finie à l'origine des x.

REMARQUE III.

82. Quand nous connoîtrions exactement le vrai rapport entre les denſités & les poids comprimans, nous ſerions peut-être encore fort éloignés de connoître le vrai rapport des denſités de l'air. Car la compreſſion de l'air & ſa dilatation n'eſt pas cauſée vraiſemblablement par le ſeul poids de ſes parties: le degré de chaleur de l'air y entre pour beaucoup. Mais comme nous ne pourrions examiner les effets de la chaleur ſans entrer dans des détails trop Phyſiques, & qui nous écarteroient trop de notre ſujet, nous nous contenterons de renvoyer le Lecteur au diſcours de M. *Bernoulli* ſur le mouvement, & à l'Hydrodynamique de M. *Daniel Bernoulli*, où il trouvera ſur cette matiére des Théories ingénieuſes.



LIVRE SECOND.

Du mouvement des Fluides renfermés dans des vaſes.

CHAPITRE I.

Principes généraux pour trouver le mouvement d'un Fluide renfermé dans un vaſe de figure quelconque.

THEOREME I.

83. SI *un Fluide* DCPL, (Fig. 31) *indéfini ou non, coule de* A *vers* B *dans un vaſe de figure quelconque* HGYy, *& qu'on diviſe le Fluide en tranches* CD, KZ, PL *perpendiculaires à* AB, *je dis que la viteſſe de chaque tranche ſera en raiſon inverſe de ſa largeur, c'eſt-à-dire, que la viteſſe en* CD, *par exemple, ſera à la viteſſe en* PL, *comme* PL *eſt à* CD.

Car ſoient ſuppoſés les eſpaces infiniment petits $CDdc$, $cd\delta x$, $PLlp$, $pl\lambda\pi$, égaux entr'eux : il eſt clair que quand la portion de Fluide $CDdc$ parviendra en $cd\delta x$, la portion $PLlp$ parviendra en $pl\lambda\pi$. Donc la viteſſe de PL ſera à la viteſſe de CD, comme Bb eſt à Aa, c'eſt-à-dire, comme PL eſt à CD, à cauſe que $Bb \times PL = Aa \times CD$.

THEORÊME II.

84. *Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Theorême précedent, ſoient en général les viteſſes des différentes tranches du Fluide dans un même inſtant, repréſentées par l'indéterminée* v. *Imaginons que* d v *ſoit l'incrément de* v *dans l'inſtant ſuivant, cette quantité* d v *étant différente pour les différentes tranches, poſitive pour les unes, & négative pour les autres; en un mot, que* $v \mp dv$, *exprime la viteſſe de chaque tranche lorſqu'elle prend la place de celle qui eſt immédiatement au-deſſous; je dis que ſi chaque tranche étoit ſuppoſée tendre à ſe mouvoir avec la ſeule viteſſe infiniment petite* $\pm dv$, *le Fluide reſteroit en équilibre.*

Car puiſque $v = v \mp dv \pm dv$, & que la viteſſe de chaque tranche eſt ſuppoſée ne point changer de direction, on peut regarder chaque tranche, dans l'inſtant où ſa viteſſe v ſe change en $v \mp dv$, comme ſi elle étoit animée à la fois de la viteſſe $v \mp dv$, & de la viteſſe $\pm dv$. Or puiſque de ces deux viteſſes elle ne conſerve que la premiére, il s'enſuit que la ſeconde viteſſe $\pm dv$ doit être telle, qu'elle ne change rien dans la premiére, & par conſéquent qu'elle ſoit anéantie. Donc ſi chaque tranche étoit animée de la ſeule viteſſe $\pm dv$, le Fluide reſteroit en repos.

REMARQUE I.

85. Il eſt évident que ce Theorême n'eſt autre choſe que l'application de notre Principe général de Dynami-

que au mouvement des Fluides. Comme toutes les Loix du mouvement des Corps folides entr'eux, ont été réduites par ce Principe aux Loix de l'équilibre de ces mêmes Corps, les Loix du mouvement des Fluides, peuvent auffi fe réduire par ce même moyen aux Loix de l'équilibre des Fluides. C'eft ce qu'on verra dans le Chapitre fuivant.

Remarque II.

86. Nous avons fuppofé dans le Theorême précedent, que les particules du Fluide n'étoient animées d'aucune force accélératrice, & qu'elles ne changeoient de viteffe d'un inftant à l'autre, qu'en vertu de leur action mutuelle. Mais qu'on les fuppofe animées d'une force accélératrice φ, différente fi l'on veut, pour chaque tranche; alors il eft évident qu'à la fin de l'inftant dt, la viteffe v feroit $v + \varphi dt$, fi les tranches n'agiffoient point les unes fur les autres. Donc fi à la fin de l'inftant dt la viteffe v devient $v \pm dv$ par l'action mutuelle des tranches, il faudra fuppofer $v + \varphi dt = v \pm dv + \varphi dt \mp dv$; & il eft évident que le Fluide refteroit en équilibre, fi chaque tranche n'étoit animée que de la viteffe infiniment petite $\varphi dt \mp dv$.

Remarque III.

87. On a regardé dans le Theorême précedent, la viteffe v comme compofée de la viteffe $v \mp dv$ & de la viteffe $\pm dv$, parce qu'on a fuppofé que la viteffe de

chaque tranche ne changeoit point de direction, & ne varioit qu'en quantité. Si la viteſſe v change à la fois de direction & de quantité, alors il faudra regarder la viteſſe v de chaque tranche, comme compoſée de celle que la tranche auroit dans l'inſtant ſuivant, & d'une autre qui ſeroit détruite. Nous entrerons ci-après dans un plus grand détail là-deſſus.

CHAPITRE II.

Du mouvement des Fluides non élaſtiques dans des vaſes, dont les parois ſont infléxibles.

Préparation pour les propoſitions ſuivantes.

I.

88. SOIT un eſpace indéfini renfermé entre les lignes Courbes quelconques & indéfinies, GP, HL, (Fig. 32), & diviſé par la ligne indéfinie EB en deux parties, égales ou inégales. Par un point fixe E pris à volonté ſur la ligne EB, ſoit menée la perpendiculaire GH. Imaginons enſuite une Courbe TXV, dont les Ordonnées YX ſoient égales au quarré de la ligne conſtante GH, diviſé par la ligne correſpondante KZ, paralléle à GH; & ſoit appellée N l'Aire de la portion $FTVN$, qui répond à une portion donnée $CDLP$ de l'eſpace indéfini renfermé entre les lignes Courbes GKP, HZL. Si

Si on ſuppoſe cd infiniment proche de CD, & pl infiniment proche de PL, de maniére que $CDdc = PLlp$; il eſt clair que l'on aura $dN = NVUn - FTtf = \frac{GH^2}{PL} \times \frac{Ff \times CD}{PL} - \frac{GH^2}{CD} \times Ff = Ff.GH^2.(\frac{CD^2 - PL^2}{PL^2.CD})$.

II.

89. En général, que les Ordonnées YX ſoient égales à $\frac{GH^2}{KZ}$ multiplié par une fonction donnée de l'Aire correſpondante $CDZK$: ſoit nommée z cette Aire, Z la fonction donnée, & ζdz la différence de cette fonction; il eſt évident, que ſi on ſuppoſe l'origine des Aires z en cd, après l'avoir ſuppoſée en CD, alors YX ſe changera en $Yx = \frac{GH^2}{KZ} \times (Z - \zeta . CDdc)$. Donc $Xx = \zeta . CDdc$. donc ſi on nomme AO ou FY, x, N ce que devient $\int \frac{GH^2.Zdx}{y}$ lorſque $x = AB$, A ce que devient Z quand $x = o$, B ce que devient Z, & D ce que devient $\int \zeta dx$, quand $x = AB$, on aura $\theta t V v = CDdc \times D$, & $dN = NVUn - FTtf - \theta t V v = Ff.GH^2 (\frac{B.CD^2 - A.PL^2}{PL^2.CD}) - Ff.D.DC.$

Du mouvement d'une portion donnée de Fluide non pesante, dans un vase indéfini.

PROBLÊME I.

90. *Supposons qu'une quantité donnée de Fluide* CDLP, (Fig. 32) *homogene & sans pesanteur, mise en mouvement par une cause quelconque comme par l'impulsion d'un piston, coule suivant* AB *dans un vase indéfini; on demande la vitesse de ce Fluide à chaque instant.*

Comme la vitesse de chaque tranche est (*art.* 83.) en raison inverse de sa largeur, il est clair qu'il suffira de trouver qu'elle est à chaque instant la vitesse d'une des tranches, par exemple de la surface CD, pour avoir celle de toutes les autres.

Or imaginons que le Fluide s'étende jusqu'à la ligne fixe GH, & nommons u la vitesse qu'auroit en ce cas-là la tranche GH, nous aurons $\frac{u.GH}{CD}$ pour celle de CD. Toute la difficulté se réduit donc à connoître u, puisque GH est constante, & que la vitesse de la tranche variable CD, sera toujours à celle de la tranche imaginaire & fictice GH, comme GH à CD.

Soit supposé le Fluide $CDLP$ divisé en portions infiniment petites $CDdc$, $KZzk$, &c. qui contiennent une égale quantité de Fluide, & soit appellée dx la hauteur, y la largeur indéterminée de chacune de ces portions, ydx sera donc constant.

Suppoſons préſentement que le Fluide ſoit parvenu dans la ſituation $cdlp$, de maniére que chaque tranche ait pris la place de celle qui la précedoit immédiatement, ſoit v la viteſſe indéterminée de chaque tranche lorſque le Fluide occupe l'eſpace $CDLP$, & que dans l'inſtant ſuivant cette viteſſe ſe change en $v \mp dv$, ou ſimplement en $v - dv$ (dv étant priſe pour une quantité indéterminée qui ſoit indifféremment poſitive ou négative;) il eſt évident (*art.* 84.) que ſi chaque tranche tendoit à ſe mouvoir avec la viteſſe dv, le Fluide ſeroit en équilibre, c'eſt-à-dire qu'on auroit (*art.* 25.)

$\int dv\, dx = 0$, ou $\int \frac{ydx \cdot dv}{y} = 0$. mais $v = \frac{u \cdot GH}{y}$. il faut donc que $\int \frac{ydx \cdot vdv}{u \cdot GH}$ ſoit zero; ou, ce qui eſt la même choſe, il faut que $\int ydx \cdot vdv = 0$, parce que GH eſt conſtante, & que u eſt conſtante auſſi par rapport aux indéterminées v & dv, qui dans un même inſtant ſont différentes pour chaque tranche. Donc puiſque ydx eſt conſtant, il s'enſuit que ſi on nomme V la viteſſe de chaque tranche dans l'inſtant, qui ſuit celui où la viteſſe étoit v, on aura $\int ydx\,(VV - vv) = 0$. ou $\int ydx \cdot VV = \int ydx \cdot vv$. donc $\int ydx \cdot vv$ doit être conſtant. Donc $\int \frac{ydx \cdot uu \cdot GH^2}{yy}$ ou $uu \int \frac{dx \cdot GH^2}{y}$ doit être une quantité conſtante : donc mettant pour $\int \frac{dx \cdot GH^2}{y}$ ſa

valeur N (*art.* 88.) on aura Nuu égale à une conſtante, ou $2PL^2.CD.Nudu + uu.Ff.GH^2(CD^2 - PL^2) = 0$.

Nomenclature.

91. Avant que d'aller plus loin, nous croyons devoir inſérer ici, pour une plus grande facilité, la plûpart des noms dont nous nous ſervirons dans la ſuite.

Nous appellerons toujours
la ligne conſtante GH, ... m
la ſurface ſupérieure CD du Fluide . . . . k
la ſurface inférieure PL . . . . K
la diſtance AB de ces deux ſurfaces . . . . q
une tranche quelconque KZ . . . . y
AO diſtance de KZ à CD x
la viteſſe indéterminée de KZ v
l'Aire $CDZK$ . . . . z
la viteſſe de la tranche fictice GH . . . . u
ce que devient $\int \frac{GH^2 dx}{y}$ lorſque $AO = AB$ . . . . N
le tems écoulé depuis le commencement du mouvement. t

COROLLAIRE I.

92. Puiſque (*ſolut. précéd.*) $\int y\,dx \,.\, vv$ eſt toujours conſtant, il eſt clair que la ſomme des produits de chaque tranche par le quarré de ſa viteſſe, fait toujours une quantité conſtante. On voit donc que le principe de la conſervation des forces vives, a lieu auſſi dans les Fluides.

COROL. II.

93. Comme la quantité de Fluide qui coule dans le Tuyau indéfini proposé demeure toujours la même, il s'ensuit que si on nomme s l'espace parcouru pendant un tems quelconque t par la surface CD, la quantité N sera toujours donnée en s. Donc si on fait en général $N = S$, S exprimant une fonction de s, on aura $Suu =$ à une constante A, & $u = \sqrt{\frac{A}{S}}$. donc $dt = \frac{ds\sqrt{S}}{\sqrt{A}}$, & $t = \int \frac{ds\sqrt{S}}{\sqrt{A}}$.

REMARQUE I.

Où l'on détermine la première vitesse imprimée au Fluide.

94. Pour déterminer la constante A dans l'article précedent, il faut savoir ce qu'est Suu lorsque le Fluide commence à se mouvoir.

Soit $ILDC$ (Fig. 33) un Piston, dont j'appelle la masse μ, α la vitesse avec laquelle le Piston est poussé, $CDLP$ le Fluide, dont je suppose que δ soit la densité, ϵ la vitesse que doit avoir GH, & par conséquent $\frac{\epsilon . GH}{CD}$ celle que doit avoir CD, & $\frac{\epsilon . GH}{y}$ celle que doit avoir une tranche quelconque, je dis qu'on aura

$$\mu . GH\,(CD . \alpha - \epsilon . GH) = CD^2 . \epsilon . \delta . N.$$

Car la vitesse du Piston après qu'il a communiqué du

mouvement au Fluide, doit être égale à celle de la premiére tranche CD, c'est-à-dire à $\frac{\epsilon . GH}{CD}$. On peut donc dans l'instant de l'impulsion, regarder la vitesse α du Piston comme composée de la vitesse $\frac{\epsilon . GH}{CD}$ qu'il doit conserver, & de la vitesse $\alpha - \frac{\epsilon . GH}{CD}$ qu'il doit perdre. De plus, comme le Fluide est en repos dans l'instant de l'impulsion, on peut regarder chaque tranche comme animée de la vitesse $+ \frac{u . GH}{y}$ qu'elle doit avoir, & de la vitesse $- \frac{u . GH}{y}$ qui doit être détruite. Donc il faut que les tranches du Fluide animées de la vitesse $- \frac{u . GH}{y}$ fassent équilibre au Piston animé de la vitesse $\alpha - \frac{\epsilon . GH}{CD}$. d'où l'on tirera l'Equation

$\mu . GH . (CD . \alpha - \epsilon . GH) = CD^2 . \epsilon . \delta . N$.

& par conséquent la valeur de ϵ.

J'observerai ici qu'on ne pourroit dans le cas présent, employer le Principe de la conservation des forces vives pour trouver la vitesse du Fluide au premier instant. Car il faudroit pour cela que $\mu (\alpha . CD - \epsilon . GH)^2 + \epsilon\epsilon\delta . N \times CD^2$ fut $= \mu\alpha\alpha\, CD^2$ ou que $- 2\mu . \alpha . CD . GH + \mu . \epsilon . GH^2 + N . CD^2\, \epsilon . \delta$ fut $= 0$: ce qui ne donneroit pas pour ϵ la valeur que l'on tire de l'Equation précedente. Aussi, comme nous l'avons déja observé dans la Dynamique, le Principe de la conservation des forces

vives n'a lieu que dans le mouvement des Corps, dont la viteſſe à chaque inſtant change infiniment peu.

REMARQUE II.

Où l'on donne d'autres manières de réſoudre le Problême précedent.

95. Pour déterminer dans le Problême précedent la quantité $\int dx\,dv$, qui, comme nous avons vû, devoit être $= 0$, nous nous ſommes ſervis d'une Méthode qui nous a conduit au Principe de la conſervation des forces vives; ç'a été principalement dans le deſſein de retrouver ce Principe dans notre ſolution, & d'en faire voir l'accord avec celle de M. *Daniel Bernoulli*, que nous avons ſuivi cette route, & donné une conſtruction ſemblable à celle de ce ſavant Geométre. Car on pourroit déterminer par bien d'autres Méthodes la quantité $\int dx\,dv$. En voici quelques-unes.

Premiere maniére.

96. Puiſque $v = \frac{u \,.\, GH}{y}$, on aura $dv = \frac{(y\,du - u\,dy)\,.\,GH}{y^2}$, & $\int dx\,dv = \int \frac{dx\,du\,.\,GH}{y} - \int \frac{u\,.\,GH\,.\,dx\,dy}{y^2} = GH\,.\,du \int \frac{dx}{y} + u\,.\,GH\,.\,y\,dx \int - \frac{dy}{y^3} = \frac{GH\,.\,N\,du}{GH^2} + \frac{Ff\,.\,u\,.\,GH}{2\,CD\,.\,PL^2}\,.\,(CD^2 - PL^2)$; d'où l'on tire, en faiſant $\int dx\,dv = 0$, la même Equation que ci-deſſus

$$2PL^2\,.\,CD\,.\,N\,u\,du + Ff\,.\,uu\,.\,GH^2\,(CD^2 - PL^2) = 0.$$

Seconde maniére.

97. Imaginons la Courbe TXV (Fig. 34) dont les Ordonnées FT, YX, NV, repréſentent les viteſſes des tranches correſpondantes dans un inſtant quelconque, & ſuppoſons que dans l'inſtant ſuivant, lorſque CD eſt parvenu en cd, KZ en kz, PL en pl (les eſpaces $CDdc$, $KZzk$, $PLlp$, étant égaux) les viteſſes FT, YX, NV, ſoient changées en ft, yx, nu, & la Courbe TXV en txu : il eſt évident que la différence de YX ſur yx, ſera ce que nous avons appellé dv. Donc ſi on nomme $\mathrm{d}v$ la différence de YX ſur $y\xi$, on aura $dv = \xi x + \mathrm{d}v$, & $\int dx\,dv$ ſera $\int \xi x \times Yy + \int dx\,\mathrm{d}v$, laquelle quantité doit être $= 0$.

Or en premier lieu, je remarque que ξx eſt en raiſon conſtante avec ξy. Car $y\xi : \delta n :: GH : kz :: yx : \delta\epsilon$; donc $\int \xi\, x \times Yy = \frac{n\epsilon}{\delta n} \times \int Yy \times YX = \frac{du}{u} \int v\, dx$ $= \frac{du}{u} \int \frac{u \,.\, GH \,.\, dx}{y} = du \,.\, GH \int \frac{dx}{y} = \frac{N du}{GH}$. A l'égard de la quantité $\int dx\,\mathrm{d}v$, on la changera en $\int \frac{y dx \,.\, v \mathrm{d}v}{u \,.\, GH} = \frac{y dx}{u \,.\, GH}$ $\times \int v\,\mathrm{d}v = \frac{y dx}{2u \,.\, GH} \times (YX^2 - FT^2) = \frac{y dx}{2uGH \,.\, KZ^2 \,.\, CD^2}$ $\times (uuGH^2 \,.\, CD^2 - uuGH^2 \,.\, KZ^2)$. Donc mettant PL pour KZ, & $Ff \,.\, CD$ pour $y dx$, on aura
$2PL^2 \,.\, CD \,.\, Nudu + uu \,.\, Ff \,.\, GH^2 (CD^2 - PL^2) = 0$.

Nous avons ſuppoſé que dv étoit égal à $\xi x + \mathrm{d}v$, ce qui

qui eſt évident, lorſqu'on ſuppoſe la Courbe txu extérieure à la Courbe TXV, ainſi que nous l'avons ſuppoſé dans la préſente Figure. Mais ſi la Courbe txu étoit intérieure à TXV, ou, pour parler plus clairement, ſi la viteſſe ft de cd étoit moindre que la viteſſe FT de CD, ce qui doit arriver dans pluſieurs cas, comme on le verra dans l'article ſuivant; alors on auroit $dv = \xi x - dv$, ou plutôt $dv = -\xi x - dv$, parce que ξx ſeroit alors négative: & il n'y auroit aucun changement à faire au calcul précedent.

REMARQUE III.

Où l'on examine dans quels cas le Fluide doit ceſſer d'être continu dans le vaſe, & ſe diviſer en deux ou pluſieurs portions.

98. Pour que le Fluide ſoit en équilibre, chaque tranche étant animée de la viteſſe dv, il faut (*art.* 24.) que cette viteſſe dv ſoit dirigée ſuivant AB (Fig. 32) pour la tranche CD, & ſuivant BA pour la tranche PL, c'eſt-à-dire que la viteſſe de CD doit, ou demeurer la même, ou diminuer, & celle de PL demeurer la même, ou augmenter. Donc ſi on nomme CD, k, & PL, K, il faudra que $d(\frac{u \cdot GH}{k})$ ſoit zero ou négatif, & que $d(\frac{u \cdot GH}{K})$ ſoit zero ou poſitif. Donc $\frac{du}{u}$ doit être $=$ ou $> \frac{dK}{K}$, & $=$ ou $< \frac{dk}{k}$; c'eſt-à-dire (à cauſe que Nuu

conſtant rend $\frac{du}{u} = -\frac{dN}{2N}$) qu'il faut que $\frac{dk}{k} =$ ou $> -\frac{dN}{2N} =$ ou $> \frac{dK}{K}$, pour que la ſolution du Problême précedent ſoit bonne. Cette ſolution ne pourroit donc avoir lieu, ſi par exemple $\frac{dk}{k}$ étoit $< \frac{dK}{K}$, c'eſt-à-dire, ſi $\frac{k}{K}$ alloit en diminuant.

Une ſeconde condition qui doit encore être obſervée néceſſairement, & qui renferme même la précedente, c'eſt que la quantité $\int dx\, dv$ dont les deux valeurs extrêmes ſont zero, ſavoir lorſque $x = 0$, & lorſque $x = AB$, n'ait aucune valeur négative, en ſuppoſant $x < AB$. Autrement (*art.* 24.) il ne pourroit ſe faire que les tranches du Fluide animées des viteſſes dv fuſſent en équilibre.

99. Mais que doit-il donc arriver, ſi ces conditions ne ſont pas obſervées ? Pour le découvrir, nous remarquerons que dans la ſolution du Problême, il a été ſuppoſé que chaque tranche prenoit toujours la place de celle qui la précedoit, & que le Fluide en changeant de place dans le vaſe, formoit toujours une maſſe unique & continue : dans ce cas la ſolution du Problême ne peut être autre que celle que nous avons donnée ; donc puiſque cette ſolution ceſſe d'être bonne lorſque les deux conditions mentionnées ci-deſſus ne ſont pas obſervées, il s'enſuit néceſſairement qu'alors le Fluide ceſſe d'être continu dans le Tuyau, & doit ſe diviſer en différentes portions ſéparées les unes des autres.

En effet, le Fluide ne forme en coulant une maſſe continue, que lorſque les parties ſupérieures peuvent agir ſur les inférieures. Donc, abſtraction faite de toute force accélératrice, la partie *CD* doit perdre de ſa viteſſe, tandis que celle de *PL* doit augmenter.

Pour mieux nous faire entendre, ſuppoſons que deux Corps ſolides ſoient contigus l'un à l'autre, & qu'on leur donne à chacun une impulſion différente ſuivant la même ligne droite. Si le Corps antérieur a reçu une viteſſe moindre que le poſtérieur, il y aura une action entre ces deux Corps, & ils ſe mouvront tous deux en ne formant qu'une même maſſe, avec une viteſſe commune, plus grande que la viteſſe imprimée à l'antérieur, & moindre que la viteſſe donnée au poſtérieur: au contraire, ſi le Corps antérieur a reçu plus de viteſſe que le poſtérieur, ces deux Corps ſe ſépareront & ſe mouvront, chacun avec la viteſſe qu'il a reçu, ſans que le mouvement imprimé à l'un change rien au mouvement donné à l'autre. De même un Fluide doit ceſſer de former une maſſe continue, lorſque la viteſſe des parties inférieures eſt telle par rapport à celle des parties ſupérieures, que celles-ci ne peuvent agir ſur celle-là.

Il eſt certain néanmoins que l'adhérence des particules du Fluide entr'elles, doit apporter ici quelque changement, & qu'un Fluide, par exemple, renfermé dans un vaſe Cylindrique, & dont la partie inférieure tendroit à ſe mouvoir plus vîte que la ſupérieure, pourroit former toujours une maſſe continue, ſi l'adhérence des par-

ties étoit aſſez grande pour que la partie inférieure pût entraîner la ſupérieure. Mais il faut obſerver que nous faiſons ici abſtraction de l'adhérence des parties, & nous aurons lieu d'examiner plus au long dans la ſuite, ce qu'elle doit changer à la regle que nous venons d'établir.

M. *Daniel Bernoulli* eſt le premier que je ſache, qui ait remarqué qu'une maſſe Fluide coulant dans un Tuyau devoit dans certains cas ceſſer d'être continue : nous parlerons plus bas de la Théorie qu'il a donnée ſur ce ſujet.

Ce ſeroit ici le lieu de déterminer en quels endroits le Fluide doit ſe ſéparer, lorſqu'il ne ſauroit former en coulant une maſſe continue ; mais pour ne point interrompre la ſuite de nos propoſitions, nous remettrons à traiter ce ſujet dans un article ſéparé, que l'on trouvera à la fin de ce Chapitre.

Du mouvement d'un Fluide peſant dans un vaſe indéfini.

PROBLÊME II.

100. *Les mêmes ſuppoſitions étant faites que dans le Problême I.* (art. 90) *avec cette condition de plus, que toutes les parties du Fluide* CDLP (Fig. 32) *ſoient animées par une peſanteur donnée* p; *on demande la Loi de ſon mouvement.*

Il eſt évident (*art.* 86.) que dans ce cas $\int dx.(pdt - dv)$ doit être égale à zero, c'eſt-à-dire (en mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx}{v}$), que $\int \frac{pydx^2}{vy} = \int \frac{ydx.dv}{y}$, ou $ydx.\int pdx =$

$\int y\,dx\,.\,v\,dv$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{u\,.\,GH}{v}$: donc en ſuivant la même route que dans l'*art.* 90, on trouvera $2\,Ff\,.\,CD\,.\,p\,.\,AB = d\,(Nuu)$ Equation qui étant combinée avec l'Equation $dt = \frac{Ff\,.\,CD}{u\,.\,GH}$, donnera la valeur de u à chaque inſtant.

COROLLAIRE I.

101. Il eſt clair que l'Equation $\int y\,dx\,.\,p\,dx = \int y\,dx\,.\,v\,dv$, renferme la Loi de la conſervation des forces vives.

Si on veut donner à l'Equation $2\,Ff\,.\,CD\,.\,p\,.\,AB = d\,(Nuu)$ une forme plus commode ; il n'y a qu'à ſuppoſer $Ff\,.\,CD\,.\,p\,.\,AB = p\,M\,dh$, en appellant M la maſſe donnée du Fluide, & l'on aura $Nuu = 2\,p\,Mh$. On remarquera que dans l'Equation $Mdh = Ff\,.\,CD\,.\,AB$, dh exprime la quantité dont le centre de gravité de la maſſe Fluide deſcend à chaque inſtant.

COROLLAIRE II.

102. Nous avons ſuppoſé que la viteſſe du Fluide commençoit à zero ; c'eſt pour cela que nous n'avons point ajouté de conſtante dans les intégrations précedentes : mais ſi le Fluide avoit été mis en mouvement par quelque cauſe, comme par l'impulſion d'un Piſton, il auroit fallu ſuppoſer $Nuu = 2\,p\,Mh + A$, A étant une conſtante qu'on détermineroit par la Méthode de l'article 94.

COROLLAIRE III.

103. Nous avons vu dans la solution du Problême précedent, que pour que le Fluide formât en coulant dans le Tuyau une masse continue, il falloit que la vitesse de la tranche CD dans un instant quelconque, fût moindre ou égale (*art.* 98) à celle qu'elle auroit eûe dans cet instant, si elle avoit pû se mouvoir librement ; & qu'au contraire la vitesse de PL fût égale ou plus grande, que celle que PL auroit eûe en se mouvant librement. D'où il s'ensuit, que dans le cas présent $\frac{pdx}{v} - dv$ doit être pour CD une quantité nulle ou positive, & pour PL une quantité nulle ou négative. Donc il faut 1°. que $2p \cdot Ff$ soit $=$ ou $> d(\frac{uu \cdot GH^2}{kk})$. 2°. Que $2p \cdot Bb$ ou $\frac{2p \cdot Ff \cdot CD}{PL}$ soit $=$ ou $< d(\frac{uu \cdot GH^2}{KK})$.

En général, il faut (*article* 24.) que la quantité $\int dx (\frac{pdx}{v} - dv)$ dont les deux valeurs extrêmes sont $= 0$, n'ait aucune valeur négative en supposant $x < AB$.

PROBLÊME III.

104. *Supposant que le Fluide* CDPL (Fig. 32) *soit composé de Couches de différentes densités, & même, si l'on veut de différentes pesanteurs, on demande le mouvement de ce Fluide dans un vase indéfini.*

Soit π la pesanteur & δ la densité indéterminée de chaque tranche, il faudra que $\int \delta dx \left(\frac{\pi dx}{v} - dv\right) = 0$; c'est-à-dire que $\int \delta y dx \,.\, \pi dx = \int \delta y dx \,.\, v dv$.

Il est clair que la densité & la pesanteur indéterminée de chaque tranche, ne sauroient être données ici par une fonction de la distance de ces tranches à la surface, ou par une fonction de la largeur de la tranche. Car, quoiqu'on suppose ici que les tranches de différente densité ne se mêlent pas, & qu'elles conservent leur parallélisme; néanmoins il est évident qu'à cause de la figure du vase, la distance & la largeur de deux tranches de densité donnée varient d'un instant à l'autre : il n'y a que le volume de Fluide contenu entre deux tranches de densité donnée, qui ne varie point, comme il est aisé de le voir : d'où il s'ensuit que la densité & la pesanteur d'une tranche quelconque KZ ne peuvent s'exprimer que par des fonctions de l'Aire $CDZK$. Soit $KZ, y, CDZK, z$, $\delta = Z$, $\pi = \mathrm{Z}$, Z & Z exprimant des fonctions données de z, M la masse du Fluide, $\mathrm{N} =$ à ce que devient $\int \frac{GH^2 \,.\, Z dx}{y}$ lorsque $x = AB$, P égale à ce que devient dans le même cas $\int Z \mathrm{Z} dx$; enfin $Pydx = Mdh$; on aura $2Mh = \mathrm{N}uu$, Equation qui renferme encore la Loi de la conservation des forces vives.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe de grandeur finie.

PROBLÊME IV.

105. *Trouver la viteſſe d'un Fluide peſant & homogene qui s'échappe d'un vaſe donné* GPLH (Fig. 35) *par l'ouverture horizontale* PL.

Il eſt évident que la viteſſe du Fluide qui ſort par PL ſera ſenſiblement la même, que ſi le vaſe étoit ſuppoſé continué en Pp, Ll, (Fig. 36) d'où l'on voit que ce Problême ſe réduit au précedent Problême II, & qu'on aura $2 . CDdc . p . AB = 2Nudu + uudN$.

Soit comme dans l'*art.* 91, $GH = m$, $PL = K$, $CD = k$, $AB = q$, $uu = 2ps$; on aura $Ff = -dq$, & mettant pour dN ſa valeur trouvée ci-deſſus *art.* 88, on aura $KKkNds - kkmmsdq + KKmmsdq = -KKkkqdq$. Equation conforme à celle qu'a trouvée M. *Daniel Bernoulli*, par le Principe de la conſervation des forces vives.

COROLLAIRE I.

106. Si le Fluide étoit compoſé de tranches de différentes denſités & de différentes peſanteurs, alors conſervant les noms des *art.* 89 & 104, & mettant pour dN ſa valeur trouvée *article* 89, on auroit
$-KKkkPdq = -kkpmmBsdq + KKkNpds + KKpmmAsdq + KKkkDpsdq$.

COROL. II.

COROL. II.

107. Si φ eſt la peſanteur qui anime la tranche PL, & qu'on faſſe $\frac{mm}{KK} ps = \varphi r$ pour avoir la hauteur r, d'où la tranche PL devroit tomber étant animée de la force φ, pour acquérir la viteſſe actuelle qu'elle a, on aura $- kkmmPdq = kN . KK\varphi dr - mm\varphi rdq . (Bkk - AKK) + KKkk\varphi Ddq$.

COROL. III.

108. Si K eſt ſuppoſé fort petit, on aura P ou $\int ZZdx = \varphi . B . r$, c'eſt-à-dire $PL . \int \pi \delta dx = PL . \varphi . B . r$; le premier membre de cette Equation exprime la preſſion que ſoutiendroit PL ſi le vaſe étoit fermé; le ſecond exprime la preſſion que ſoutiendroit ce même fond, s'il étoit chargé d'une colomne de Fluide dont la baſe fût PL, la hauteur r, & dont les parties euſſent une denſité B, & une peſanteur φ égale à celle du Fluide qui ſort, ce qui s'accorde avec le §. 11. Sect. 3. de l'Hydrodynamique de M. *Bernoulli.*

Lorſque le Fluide eſt homogene & d'une peſanteur p conſtante pour toutes les parties, on a $AB = r$, c'eſt-à-dire que *le Fluide ſort quand l'ouverture eſt fort petite, avec une viteſſe qui eſt la même que celle qu'il auroit acquiſe, en tombant d'une hauteur égale à celle de la ſurface ſupérieure du Fluide au-deſſus de l'ouverture.*

SCOLIE.

109. L'Expreſſion que nous venons de donner dans l'article précedent, de la viteſſe du Fluide qui ſort d'un vaſe dont le trou eſt fort petit, n'eſt pas exactement vraye, & eſt même fort différente de la véritable expreſſion de la viteſſe au commencement du mouvement.

Pour le faire voir, reprenons l'Equation
$KKkNds - kkmmsdq + KKmmsdq = - KKkkqdq$,
& ſuppoſons afin de ſimplifier le calcul, que la conſtante GH, m, ſoit l'ouverture même PL (K), auquel cas la quantité s ſera la hauteur dûe à la viteſſe du Fluide qui ſort par PL : en prenant c pour le nombre dont le Logarithme eſt l'unité, on aura en général
$$s c^{\int(-k^2dq + K^2dq):kN} = \int \frac{-kqdq}{N} c^{\int(-k^2dq + K^2dq):kN}.$$

Si K eſt ſuppoſée infiniment petite, alors N qui eſt $\int\frac{K^2dx}{y}$ deviendra infiniment petite d'un ordre inférieur; de plus, on pourra négliger dans l'Equation précedente la quantité K^2dq qui eſt toujours nulle par rapport à k^2dq, & l'Equation deviendra
$$s c^{\int(-kdq):N} = \int\frac{-kqdq}{N} c^{\int(-kdq):N}.$$

Si on ſuppoſe que q ſoit $= a$ au commencement du mouvement, & qu'en général $q = a - \text{q}$, on aura, tant que q & a différeront peu l'un de l'autre
$$k\ s = kq - kac^{(-k\text{q}):N} + N - N c^{(-k\text{q}):N}.$$

Lorſque kq eſt infiniment grande par rapport à N, ce qui arrive dès que q eſt infiniment petite du premier ordre, alors $s = q$: au contraire, tant que kq eſt infiniment petite par rapport à N, on a,

$$s = \int \frac{-kq\,dq}{N} = \frac{k}{N} \times aq.$$

Cette derniére Equation fait voir, & M. *Daniel Bernoulli* l'a déja remarqué, que la ſurface *CD* au commencement du mouvement, s'accélere comme les Corps peſans qui tombent librement.

Donc en général, ſuppoſant q fort petit, on voit que le tems que la ſurface *CD* met à s'abaiſſer de la quantité q, eſt $> \int \frac{-dq.k}{K\sqrt{[2pq]}}$, c'eſt-à-dire que ce tems eſt $> \frac{kq}{K\sqrt{[2pa]}}$; cependant il ne doit pas être beaucoup plus grand. Car $\sqrt{[2pq]}$ eſt l'expreſſion de la viteſſe dès que q commence à être infiniment petite du premier ordre : de plus, lorſque q eſt infiniment petite du troiſiéme, alors l'expreſſion du tems eſt $\int \frac{kdq\sqrt{N}}{K\sqrt{[2p.kaq]}} = \frac{2k\sqrt{[Nq]}}{K\sqrt{[2p.ak]}}$ qui eſt infiniment petite de l'ordre $\frac{3}{2}$. Donc puiſque l'expreſſion du tems $\frac{kq}{K\sqrt{[2ap]}}$ eſt finie, lorſque q eſt infiniment petite du premier ordre; il s'enſuit que lorſque q eſt infiniment petite du ſecond ordre, l'expreſſion moyenne doit être infiniment petite de l'ordre $\frac{1}{2}$. Donc $\frac{kq}{K\sqrt{[2ap]}}$

peut être regardée comme exprimant le tems de la descente à un infiniment petit près.

Nous remarquerons, au reste, qu'on ne sauroit supposer que $\sqrt{[2pq]}$ exprime la vitesse du Fluide qui sort par PL, à moins que le tems que la surface CD met à s'abaisser d'une quantité q infiniment petite du premier genre, ne soit très-petit. Or comme les Corps pesans tombent de 15 pieds en une seconde de tems; il s'ensuit qu'en général, le tems que la surface CD met à s'abaisser d'une quantité égale à q, est à une seconde de tems :: kq est à $2K\sqrt{[a.15]}$. Donc on ne peut prendre $\sqrt{[2pq]}$ pour l'expression de la vitesse du Fluide qui sort par PL, que dans le cas ou kq ne différe pas beaucoup de $2K\sqrt{[a.15]}$; (k, q, K, a,) étant supposées exprimées en pieds & en parties de pieds.

REMARQUE

Où l'on examine les suppositions qui ont été faites dans la solution des Problêmes précedens.

110. Les solutions que nous avons données des quatre Problêmes précedens, sont appuyées sur deux suppositions. 1°. Que les différentes tranches du Fluide conservent exactement leur parallélisme, ensorte qu'une tranche prenne toujours la place de celle qui la précede. 2°. Que la vitesse de chaque tranche ne varie point en direction, c'est-à-dire que tous les points d'une même tranche sont supposés avoir une vitesse égale & paralléle à AB.

La premiére supposition n'a rien qui ne soit très-plau-

ſible, & eſt même en quelque ſorte confirmée par l'Expérience; car quand l'eau s'échappe d'un vaſe par une ouverture quelconque, la ſurface ſupérieure de l'eau demeure toujours ſenſiblement plane & horizontale, au moins tant que cette ſurface n'eſt pas arrivée à une diſtance fort petite de l'ouverture du vaſe. Or il me ſemble qu'il eſt aſſez naturel de conclure de-là, que les tranches du Fluide conſervent leur parallèliſme. Car il ſeroit fort difficile de concevoir comment la premiére tranche conſerveroit ſon parallèliſme, ſi les tranches intérieures du vaſe ne conſervoient pas le leur. D'ailleurs il ne paroît point qu'il y ait de raiſon, pour que la tranche ſupérieure conſerve ſon parallèliſme plutôt que les autres. Au contraire, comme les parties des Fluides ont entr'elles une certaine adhérence, la premiére tranche ne ſemble devoir conſerver ſon parallèliſme, que parce que les autres tranches qui l'entraînent conſervent le leur.

A l'égard de la ſeconde ſuppoſition, il eſt évident qu'elle ne ſauroit être rigoureuſement exacte, puiſque chaque tranche en conſervant ſon parallèliſme, change de figure à chaque inſtant, & qu'ainſi les particules ne peuvent être ſuppoſées conſerver la même direction d'un inſtant à l'autre.

Néanmoins ſi les tranches conſervent leur parallèliſme, ce qui eſt très-vraiſemblable, comme on vient de le voir, on ne peut guère imaginer que les deux maniéres ſuivantes, dont les particules du Fluide puiſſent ſe mouvoir.

On peut ſuppoſer d'abord que toutes les particules d'une tranche quelconque qui peuvent deſcendre parallélement à AB ſans en être empêchées par les côtés du vaſe, deſcendent en effet de cette maniére, tandis que les autres qui ſont proches du vaſe deſcendent par des mouvemens fort obliques, pour venir ſe mettre dans l'eſpace qu'elles trouvent vuide. Or comme le nombre de ces derniéres particules eſt infiniment petit par rapport aux autres, il eſt évident qu'on pourra toujours ſuppoſer, ſans erreur ſenſible, que la viteſſe de tous les points d'une même tranche eſt paralléle à AB.

En ſecond lieu, on peut ſuppoſer que les particules N, T, M, V &c. (Fig. 37) décrivent des Courbes NTR, MVS, qui diviſent les tranches CD, KZ &c. en même raiſon. Car en ſuppoſant par exemple $Cd\delta x = CDdc$, on trouve que $nm\mu\nu = NMmn$: donc en imaginant les points N, M, mûs ſuivant les Courbes $Nn\nu$, $Mm\mu$, on voit aiſément de quelle maniére la tranche $CDdc$ peut parvenir en $cd\delta x$ en changeant de figure. Si cela eſt, la viteſſe Nn ou nn (Fig. 38) d'une particule N quelconque dans un inſtant, ſe changeant en $n\nu$ dans l'inſtant ſuivant, doit être regardée comme compoſée de cette viteſſe $n\nu$, & d'une autre viteſſe νn qui eſt anéantie. La viteſſe νn qui doit être détruite, doit être regardée comme compoſée des viteſſes νi & in : or comme la viteſſe νi eſt évidemment la même pour toutes les particules d'une même tranche, il eſt clair, qu'abſtraction faite de la viteſſe in, les tranches doivent reſter en équi-

libre en vertu de la ſeule viteſſe *vi*. On peut donc dans la ſolution des Problêmes précedens, ne faire attention qu'à la viteſſe de chaque particule eſtimée parallélement à *AB*, & pour lors ces ſolutions ſeront exactes, en regardant ce que nous avons appellé v, non comme la viteſſe réelle des particules de chaque tranche, mais comme la viteſſe de ces particules eſtimée ſuivant *AB*.

A l'égard de la viteſſe *in* qui n'eſt pas la même pour toutes les particules de la tranche *cd*; ſi on veut que les particules *N* du Fluide décrivent les Courbes *Nnν*, il faut néceſſairement ſuppoſer qu'il y a dans les parties du Fluide quelque force interne qui détruit cette viteſſe, comme pourroit être, par exemple la force qui cauſe l'adhérence des particules entr'elles. Car il n'eſt pas douteux (*art.* 7 & 10) que cette viteſſe ſuivant *in* ne détruisît l'équilibre, ſi elle n'étoit pas contrebalancée par quelque force.

En un mot, pour que les tranches conſervent leur parallélisme, il paroît néceſſaire que la viteſſe de toutes, ou de preſque toutes les particules d'une même tranche, eſtimée ſuivant *AB* ſoit la même pour toutes ces particules. Or cela ſuffit pour l'exactitude des ſolutions que nous avons données.

Si on ne veut pas convenir que les tranches conſervent leur parallélisme, j'avoue qu'il ſeroit peut-être fort difficile de démontrer cette ſuppoſition en rigueur, quoique l'Experience la rende très-plauſible. Mais auſſi il faut dans ce cas renoncer à toute Théorie ſur le mou-

vement des Fluides, jusqu'à ce que nous en connoissions la nature. Car il n'y auroit plus alors d'autre moyen pour déterminer ce mouvement, que d'examiner celui que chaque particule devroit avoir : or c'est à quoi nous ne croyons pas qu'on puisse atteindre sans connoître la nature des Fluides.

Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase par une ouverture faite au fond.

111. Dans la solution du Problême précedent, nous avons supposé que le fond *PL* dans un vase étoit entiérement ouvert ; la Méthode que nous avons suivie pour trouver dans ce cas la vitesse du Fluide qui en sort, peut aussi servir à déterminer la vitesse d'un Fluide, sortant d'un vase par une ouverture *PL* (Fig. 39) faite au fond *KS* de ce vase ; il y a cependant quelques précautions à prendre dans l'application de cette Méthode.

On a supposé dans le Problême IV. que la vitesse de chaque tranche étoit en raison inverse de sa largeur. Mais comment peut-on supposer ici que la vitesse de *ks* infiniment proche de *PL* soit à celle de *PL*, comme *PL* à *ks*, & que la vitesse de la tranche *ksSK* se change en un instant, en une autre vitesse qui différe de la premiére d'une quantité finie ? On ne peut sauver cette espece d'absurdité, qu'en imaginant que les particules du Fluide qui sont proches du fond, s'approchent de ce fond par des mouvemens fort obliques suivant les lignes Courbes *kOP*, *sQL*, tandis que les parties du Fluide contenues

contenues dans les espaces kKP, sSL sont regardées comme stagnantes. L'Expérience est là-dessus d'accord avec la Théorie, * & nous fait voir, de plus, que ces Courbes kOP, sQL, soit qu'elles varient, ou non, à chaque instant, sont toujours fort petites, & fort peu élevées au-dessus du fond.

112. De-là il s'ensuit qu'on peut substituer au vase donné, le vase fictice $CkOPLQSD$ dans lequel on supposera que le Fluide se meuve; & alors, non-seulement la Méthode du Problême précedent peut s'appliquer ici, mais il n'y a même aucun changement à faire à la solution, & on peut entiérement faire abstraction des Courbes kOP, sQL. Car comme ces Courbes kOP, sQL sont très-petites l'une & l'autre; il s'ensuit, soit que ces Courbes varient, ou non, que la quantité que nous avons appellée N (*art.* 88 & 105) différe très-peu de ce qu'elle seroit, si on n'avoit aucun égard à ces Courbes, au moins lorsque l'ouverture PL n'est pas très-petite par rapport à KS. Quant aux cas où l'ouverture PL est infiniment petite, nous avons vu ci-dessus (*art.* 108.) que la vitesse du Fluide sortant par PS étoit égale à $\sqrt{[2p \cdot AB]}$, quelle que fût la figure du vase.

113. Au reste, il est si essentiel de supposer que les particules du Fluide s'approchent du fond PL par des Courbes kOP, sQL, que sans cela on devroit trouver pour la vitesse de l'eau qui sort par PL, une expression très-différente de celle qu'on trouveroit par la Théorie

* Voyez l'Hydrodyn. de M. *Daniel Bernoulli*, Sect. 4. §. 3.

précedente. Pour le faire voir dans un cas très-simple, soit un vase Cylindrique $CDSK$ (Fig. 40) percé d'un trou PL, on auroit en général par la Théorie précedente

$$2KKqudu - uu(k^2dq - K^2dq) = - 2KKpqdq.$$

Supposons présentement, que la vitesse u de la tranche $ksSK$ se change subitement d'un instant à l'autre dans la vitesse V que doit avoir le Fluide qui sort par PL, tandis que la vitesse du Fluide contenu depuis CD jusqu'en ks augmente de la quantité du. Il est clair qu'il faudra regarder la vitesse u de la tranche $KSsk$, au moment qu'elle se change en V, comme composée de la vitesse V & de la vitesse $u - V$, & que les particules qui sont dans l'espace $ksSK$, animées de la vitesse $V - u$ suivant BA, devroient faire équilibre au reste du Fluide animé de la vitesse $pdt - du$. On aura donc $BQ.(V - u) = AB.(pdt - du)$ ou en mettant q pour AB, $-dq$ pour BQ, pour V sa valeur $\frac{uk}{K}$, & pour dt, $\frac{-dq}{u}$;

$$- Kpqdq - Kqudu = u^2dq(K - k)$$

Equation qui différe de la précedente.

Or, sans parler de la difficulté qu'il y a à imaginer comment la vitesse u peut se changer subitement en V, sans que le plus grand nombre des parties de la tranche $ksSK$ ait des mouvemens fort obliques, une preuve sensible que cette derniére Equation ne fourniroit qu'une détermination fautive du mouvement du Fluide, c'est qu'en y supposant l'ouverture K fort petite, on ne pourroit pas en déduire que la vitesse du Fluide qui sort, fût

égale à celle qu'il auroit acquise en tombant librement de la hauteur *DS*, quoique ce fait soit constaté par l'Expérience.

Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase par une ouverture verticale faite aux parois du vase.

114. Lorsqu'un Fluide sort d'un vase situé verticalement, par une ouverture qui n'est pas horizontale, il est évident que la surface supérieure du Fluide n'étant pas alors paralléle à l'ouverture, on ne sauroit supposer que les tranches conservent leur parallélisme : il y a lieu de croire cependant, que si le trou est fort petit, le Fluide ne commence à se détourner de la verticale, que quand il est fort près du trou ; alors la vitesse du Fluide doit être à peu près la même, que si l'ouverture étoit horizontale. Si l'ouverture n'est pas très-petite, en ce cas, je conçois que les mouvemens des particules doivent être fort irréguliers, & le Problême me paroît du genre de ceux où il n'y a pas assez de données. Il me semble néanmoins, que si l'ouverture n'est pas fort considérable, on peut supposer que la vitesse d'une particule quelconque qui passe par cette ouverture, est égale à la vitesse que cette particule auroit acquise en tombant librement par sa propre pesanteur, d'une hauteur égale à la distance qu'il y a de cette particule à la surface supérieure du Fluide. D'où l'on voit que la vitesse de toutes les particules qui sortent à la fois par l'ouverture du vase, n'est pas la même, comme quand l'ouverture est horizontale,

mais que cette viteſſe eſt d'autant plus grande, que les particules ſont plus éloignées de la ſurface ſupérieure du Fluide.

Du mouvement d'un Fluide dans un Tuyau incliné.

115. La plûpart des Auteurs qui ont traité du mouvement des Fluides dans des vaſes, ſuppoſent que dans un Tuyau cylindrique incliné dont la partie *ABDC* (Fig. 41) eſt remplie de Fluide, les mouvemens des particules du Fluide ſont paralléles aux côtés du Tuyau. Cette ſuppoſition, qui ſemble d'abord fort naturelle, renferme cependant beaucoup de difficultés. Car ſoient a, α deux particules quelconques de deux tranches AB, CD, leſquelles tendent naturellement à ſe mouvoir ſuivant ab, $\alpha\beta$ par l'effort de leur peſanteur; & ſuppoſons que ces particules a, α, doivent ſe mouvoir dans le Tuyau ſuivant les lignes ac, αx paralléles aux côtés du Tuyau; il faut par notre Principe général, regarder les efforts ab, $\alpha\beta$ comme compoſés des viteſſes ac, αx, & des efforts, $a\delta$, $\alpha\delta$, qui doivent être détruits. Or il eſt impoſſible que ces efforts ſoient détruits 1°. parce qu'ils ſont égaux, & dirigés dans le même ſens pour toutes les particules du Fluide : 2°. parce qu'ils ne ſont pas perpendiculaires aux tranches AB, CD, quoique cela ſoit néceſſaire pour l'équilibre.

Il n'y a pas moins d'inconvénient à ſuppoſer que le Fluide coule de maniére, que la ſurface AB ſoit perpendiculaire aux côtés du Cylindre. Car outre qu'il fau-

droit montrer, comment la ſurface *AB*, d'horizontale qu'elle étoit au commencement du mouvement, deviendroit dans la ſuite inclinée, les deux difficultés que nous venons de faire pour le cas où *AB* demeureroit horizontale, auroient encore lieu ici.

D'un autre côté, il eſt évident que la figure & la poſition du vaſe ne permet pas de ſuppoſer que toutes les parties du Fluide deſcendent verticalement; auſſi ce qui paroît devoir arriver, c'eſt que les particules que les côtés du vaſe n'empêchent point de deſcendre verticalement, deſcendront en effet de cette maniére : à l'égard des particules que les côtés du vaſe empêchent de deſcendre verticalement, ou bien elles viendront par des mouvemens fort obliques remplir l'eſpace que laiſſent à remplir les parties qui deſcendent verticalement, & en ce cas le mouvement du Fluide ſera le même à peu près que dans un vaſe Cylindrique vertical de même baſe & de même hauteur que le propoſé; ou bien les particules contigues au vaſe deſcendront beaucoup moins vîte que les autres, & en ce cas la ſurface *AB* du Fluide ne ſera point plane pendant le tems qu'il s'écoulera, les tranches ne conſerveront plus leur parallélisme, & le Problême renfermera des difficultés inſolubles.

REMARQUE I.

116. Si on ſuppoſe de l'adhérence dans les particules du Fluide, en ce cas, on peut imaginer aiſément que les particules ſe meuvent parallélement aux parois du

vaſe, pourvû que les ſurfaces *AB*, *CD* (Fig. 42) ſoient perpendiculaires à ces mêmes parois. Voici comment; on décompoſera pour chaque particule la force de la peſanteur ſuivant *ab* en une force ſuivant *ac* paralléle à *BD*, & une force ſuivant *ad* qui ſoit dans la direction de *AB*, & par conſéquent perpendiculaire à *BD*. Or je dis qu'en ayant égard à l'adhérence des parties, on peut ſuppoſer que les particules du Fluide animées de la force accélératrice *ad* ſont en équilibre. Car les particules *a*, *α* qui ſont ſituées dans la même ligne *aα* paralléle à *AC*, tendent en vertu des forces *ad*, *αδ* à s'échapper en ſens contraires, avec des viteſſes égales: donc elles reſteront en repos, ſi l'adhérence des parties du Fluide eſt aſſez grande pour les retenir.

Je ne ſai ſi c'eſt par cette raiſon que M. *Daniel Bernoulli* a ſuppoſé dans ſon Hydrodynamique, que la ſurface d'un Fluide qui ſe meut dans un Tuyau incliné, eſt perpendiculaire aux parois du Tuyau.

REMARQUE II.

117. S'il étoit poſſible que le Fluide ſe mût de maniére que ſes particules décriviſſent des lignes paralléles aux côtés du vaſe, ſans que les ſurfaces *AB*, *CD* fuſſent perpendiculaires à ces mêmes parois, en ce cas il faudroit toujours néceſſairement ſuppoſer que la force *ad* fût dans la direction de *AB*; autrement il ſeroit impoſſible qu'il y eût jamais équilibre, même en admettant l'adhérence des parties, parce que la force *ad* pourroit toujours ſe

décompoſer en deux forces, dont l'une tendroit à mouvoir toutes les particules ſuivant *ac*, & ne pourroit manquer de produire un effet.

De plus, ſi la force *ad* eſt dans la direction de *AB*, il faut ſuppoſer, comme on l'a déja fait dans l'*article* 110. qu'il y a une force interne qui en détruit l'effet.

En ce cas, la force des particules ſuivant *aa* feroit plus grande que leur peſanteur, puiſque *ac* feroit alors plus grande que *ad*. On remarquera, de plus, que la conſervation des forces vives n'auroit point lieu pour lors, puiſque les parties du Fluide parcourroient dans un tems donné un plus grand eſpace que ſi elles étoient libres, & feroient animées par une force plus grande. La conſervation des forces vives auroit lieu néanmoins, ſi on n'avoit égard qu'à la viteſſe du Fluide eſtimée ſuivant la direction verticale, & non pas à la viteſſe réelle du Fluide ſuivant la longueur du Tube.

De la quantité de Fluide qui s'échappe d'un vaſe dans un tems donné.

118. La viteſſe d'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe par une ouverture donnée, ayant été trouvée par la ſolution des Problêmes précedens, il ſemble d'abord que ce ſoit une queſtion de pure Geométrie, & qui n'a aucune difficulté, que de trouver la quantité de Fluide qui s'écoule dans un tems donné : cela feroit en effet fort facile ſi les particules du Fluide ſortoient du vaſe ſuivant des directions paralléles. Mais M. *Newton* a obſervé que

ces particules ont des directions convergentes, & que la veine de Fluide qui sort va en diminuant de grosseur jusqu'à une certaine distance de l'ouverture, distance qui est d'autant plus grande, que l'ouverture elle-même est plus grande. De-là il s'ensuit que pour trouver la quantité de Fluide qui sort à chaque instant, il ne faut plus prendre le produit de la grandeur de l'ouverture par la vitesse du Fluide, mais le produit de la vitesse du Fluide dans l'endroit où la veine d'eau est le plus contractée, par la largeur de cette même veine dans cet endroit. Voyez l'Hydrodynamique de M. *Daniel Bernoulli* sect. 4. où cette matiére est traitée fort au long, & à laquelle je me contente de renvoyer, ne croyant pas qu'on puisse ajouter rien à ce qu'il a dit là-dessus.

Remarque.

119. Cette contraction de la veine avoit induit M. *Newton* en erreur dans la premiére édition de ses Principes. Car comme il mesuroit la vitesse de l'eau sortant du vase par la quantité d'eau qui sortoit, sans faire attention à la contraction de la veine, il en avoit conclu que la vitesse du Fluide étoit égale à celle qu'il auroit acquise en tombant, non de la hauteur entiére, mais de la moitié de la hauteur de la surface au-dessus de l'ouverture. Faisant ensuite attention à la contraction de la veine, il reconnut que son cercle le plus petit étoit à l'ouverture circulaire du vase à peu près comme 1 à $\sqrt{2}$, & qu'ainsi la quantité de Fluide qui s'écouloit dans un tems donné, devoit être moindre

moindre en ce même rapport, que celle qui se seroit écoulée, si la veine n'avoit eu aucune contraction.

Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase qu'on entretient toujours plein à la même hauteur.

PROBLÊME V.

120. *Déterminer la vitesse d'un Fluide qui sort d'un vase qu'on entretient toujours plein à la même hauteur.*

Soit CD (Fig. 32) la surface du Fluide, PL l'ouverture du vase; & soit supposée la surface CD parvenue en cd; il est clair, que puisque le vase est entretenu toujours plein (*hyp.*) il faut imaginer que tandis que la surface CD parvient en cd, une nouvelle Couche $CDdc$, est créée, pour ainsi dire, dans l'espace $CDdc$, & reçoit une vitesse égale à celle de la Couche CD. D'où l'on voit que cette nouvelle Couche n'agit en aucune maniére sur la surface CD, & qu'ainsi l'augmentation ou la diminution de vitesse du Fluide pendant cet instant, est la même que si le vase n'étoit pas entretenu plein à la même hauteur durant cet instant.

Donc si on suppose que $PL \times x$ exprime la quantité de Fluide qui est sorti du vase pendant un tems quelconque depuis le commencement du mouvement, on aura

$$Nudu + \frac{uu}{2}(NnUV - FTtf) = CDdc.p.AB,$$

c'est-à-dire en faisant $AB = a$, $GH = PL$ (& par conséquent $m = K$) & $uu = 2ps$

$$kkNds + s(Kkkdx - K^3dx) = kkKadx$$

O

REMARQUE I.

121. M. *Daniel Bernoulli* diſtingue deux différentes maniéres d'entretenir le vaſe toujours plein. La premiére eſt celle dont nous venons de faire mention, & conſiſte à imaginer qu'on crée continuellement une nouvelle ſurface, qui ait la viteſſe de celle qui la ſuit immédiatement.

La ſeconde eſt d'imaginer que la nouvelle ſurface *CDdc* ſoit ajoutée par infuſion latérale, & qu'elle reçoive ſa viteſſe de celle qui la ſuit immédiatement : mais comment la ſurface *CD* étant animée d'une viteſſe finie, peut-elle traîner après elle une couche de Fluide ſupérieure, qui n'a aucune viteſſe, & lui communiquer du mouvement? La ſeule tenacité des parties du Fluide peut produire cet effet : ainſi nous remettons à en parler plus au long dans la remarque ſuivante.

REMARQUE II.

122. Soit *CD* (Figure 43) la ſurface du Fluide, & concevons qu'au-deſſus de cette ſurface, on ajoute la petite Couche $CD\delta x = CDdc$, qui n'ait aucun mouvement, & qui ſoit entraînée en *CDdc* par l'action du Fluide inférieur ; en réitérant ainſi à chaque inſtant cette petite maſſe $CD\delta x$, qui eſt non-ſeulement infiniment petite, mais qu'on peut ſuppoſer même infiniment petite de tel ordre qu'on voudra, puiſque l'ordre d'infiniment petit de ſon égale *CDdc* eſt arbitraire, on aura une idée de la ſeconde maniére d'infuſion, dont nous

avons parlé dans la Remarque précedente d'après M. *Bernoulli*, & par le moyen de laquelle on conserve toujours le vase plein à la même hauteur.

Pour déterminer dans ce cas la vitesse du Fluide, nous supposerons que V soit la vitesse de la surface CD; il est évident que la tranche $CD\delta x$, qui, dans l'instant qu'on la suppose ajoutée à CD, n'a aucune vitesse, auroit dans l'instant suivant la vitesse pdt, si elle pouvoit se mouvoir librement; & qu'entraînée par la tranche $CDdc$, elle aura dans ce même instant la vitesse V ou une vitesse $V+\alpha$ qui en différera infiniment peu; donc il faut regarder la vitesse pdt de cette tranche, comme composée de la vitesse $V+\alpha$ & de la vitesse $pdt-V-\alpha$, qui doit être détruite: c'est pourquoi il faudra que la tranche $CD\delta x$ animée de la vitesse $pdt-V-\alpha$ fasse équilibre à toutes les autres tranches animées de la vitesse $pdt-dv$. On aura donc

$$CD.A\alpha.(pdt-V-\alpha)+CD\int dx\,(pdt-dv)=0;$$

& effaçant dans le premier membre les quantités pdt, & α nulles par rapport à V, mettant pour $A\alpha$, sa valeur Aa, pour $\int dx\,dv$ sa valeur trouvée *art.* 96, pour dt sa valeur $\frac{Aa.CD}{u.GH.}$, & pour V, $\frac{u.GH}{CD}$; on aura

$$\frac{Aa.uGH}{CD}=\frac{p.AB.Aa.CD-Nudu}{u.GH}-Aa.CD.uGH\times\left(\frac{CD^2-PL^2}{2CD^2.PL^2}\right).$$

Si l'on suppose pour abreger les expressions, que la

ligne constante GH soit l'ouverture même $PL = K$, & que u soit par conséquent la vitesse de PL, on aura suivant les noms de l'*art.* 120. $Aa = \frac{Kdx}{k}$; l'Equation suivante deviendra en transposant, & supposant $uu = 2pr$;
$Kkkadx = kkNdr + 2r.K^3dx - rK^3dx + rKkkdx$;
ou $kkKadx = kkNdr + rK^3dx + Kkkrdx$.

REMARQUE III.

123. L'Equation que donne M. *Daniel Bernoulli* pag. 94. de son Hydrodynamique, pour le cas dont nous venons de faire mention dans l'article précedent, revient à celle-ci $Kadx = Ndr + Krdx$. Or cette Equation ne s'accorde avec la nôtre, que dans le cas où K est fort petit, parce qu'alors le terme rK^3dx est nul par rapport aux autres.

D'où peut donc provenir la différence qui se trouve ici entre nos deux solutions, puisque jusqu'à présent nous avons toujours été d'accord dans les précedentes ? voici, ce me semble, quelle en est la raison. M. *Daniel Bernoulli* est parvenu à son Equation, en se servant du Principe de la conservation des forces vives. Si nous avions employé ce Principe dans le cas dont il s'agit ici, nous aurions trouvé
$PL^2.CD(CD\delta x.VV + 2Nudu) + Aa.uu.GH^2 \times (CD^2 - PL^2) = 2PL^2.CD.CD\delta x.p.AB$, ce qui, en faisant comme ci-dessus $GH = K$, nous auroit donné l'Equation même $Kadx = Ndr + Krdx$, que M. *Da-*

niel Bernoulli a trouvée par une voye différente. Mais nous avons déja fait voir dans notre Dynamique, qu'on ne doit pas employer le Principe de la conſervation des forces vives, quand le changement que reçoit la viteſſe de chaque Corps, n'eſt pas infiniment petit. Or dans le cas dont il s'agit, la petite maſſe $CD\delta x$ eſt ſuppoſée paſſer tout d'un coup de zero de viteſſe, à une viteſſe finie V. Le principe de la conſervation des forces vives, ne paroît donc point devoir être employé ici.

REMARQUE IV.

124. On dira, peut-être, que dans notre ſolution nous n'avons pas dû ſuppoſer que la maſſe $CD\delta x$ animée de la viteſſe $-V$ dont la direction eſt de A vers α, fit équilibre aux autres tranches du Fluide animées chacune de la viteſſe $p\,dt - dv$ qui lui convient. Cette objection ſeroit ſans replique, ſi les parties du Fluide n'étoient pas adhérentes entr'elles, & pour lors il ſeroit impoſſible que le Fluide $CDLP$ pût entraîner avec lui la maſſe $CD\delta x$. Mais ſi on a égard à l'adhérence des parties, alors la ſolution eſt exacte. Car pour que le Fluide faſſe en coulant une maſſe continue, il faut que $Aa \times - V + \int dx\,(p\,dt - dv)$ ſoit $= 0$, comme il eſt aiſé de le conclure de ce qui a été démontré dans l'*article* 52 : il faut, de plus, qu'en appellant A l'Aire qui exprimeroit la force d'adhérence des parties du Fluide, comme dans l'*article* 45, la quantité $Aa \times - V + \int dx\,(p\,dt - dv)$ n'ait aucune valeur négative $> A$. Si le contraire arrivoit, en ce cas le Flui-

de se sépareroit infailliblement, mais la tranche $CD\delta x$ suivroit toujours nécessairement une partie du Fluide inférieur, & ne formeroit jamais une masse isolée, parce qu'on peut supposer $A\alpha$ ou Aa si petit, que $Aa . CD . V$ soit $< A$.

REMARQUE V.

125. Si la tranche $CD\delta x$ étoit supposée avoir une vitesse donnée B dans l'instant qu'on l'applique sur CD, en ce cas il faudroit faire $Aa\,(B - V) + \int dx\,(pdt - dv) = 0$. ce qui donneroit l'Equation

$2Kkkpadx + 2B . KKkdx\sqrt{[2pr]} = 2Np . kkdr + 2prK^3dx + 2prKkkdx.$

De l'oscillation d'un Fluide dans un Syphon.

PROBLÊME VI.

126. *Trouver le mouvement d'un Fluide* CDKSPL, (Fig. 44) *pesant & homogene qui balance dans un Syphon de figure quelconque.*

Il est visible que ce Problême n'est qu'un cas particulier de celui que nous avons résolu, en cherchant les Loix du mouvement d'un Fluide dans un vase indéfini : il y a seulement cette différence que le Fluide doit monter dans une des branches $PQSL$, & descendre dans l'autre ; desorte que si on nomme x les différentes parties AO de la ligne AZ, z les différentes parties BV de la ligne BE, on aura $pdt - dv$ ou $\frac{pdx}{v} - dv$ pour

la viteſſe perdue par chaque tranche de la portion $CDQK$, & $pdt + dv$ ou $\frac{pdz}{v} + dv$ pour la viteſſe perdue par chaque tranche de la portion $PLSQ$. Il faudra donc que $\int dx\,(pdt - dv) = \int dz\,(pdt + dv)$ ou que $pdt\,(AZ - BE) = \int dx\,dv + \int dz\,dv$: en opérant ſur cette Equation, comme on a fait ſur les Equations ſemblables qu'on a trouvées dans les Problêmes précedens, on trouvera aiſément la viteſſe du Fluide pour chaque inſtant ; & de plus, il eſt aiſé de voir que la ſomme des forces vives du Canal $CDQK$, plus la ſomme des forces vives du Canal $PLSQ$ eſt égale à chaque inſtant au produit de la maſſe totale du Fluide multipliée par le double de la quantité, dont le centre de gravité de cette maſſe eſt deſcendu depuis le commencement du mouvement.

REMARQUE I.

127. Nous n'avons conſideré dans la ſolution précedente, que le mouvement du Fluide renfermé dans la partie $CDKQ$ & du Fluide renfermé dans la partie $PLSQ$, & nous avons ſuppoſé que les tranches de chacune de ces portions de Fluide conſervoient leur parallélisme. Mais il faut auſſi avoir égard au mouvement du Fluide renfermé dans la partie $KQSR$, & cette conſidération eſt d'autant plus néceſſaire, que cette partie eſt quelquefois fort conſidérable, comme on le voit dans la Figure 45.

Lorſque la partie $KQSR$ eſt peu conſidérable comme dans la Figure 44, alors on ne peut guère imaginer que la partie KQ parvienne en QS autrement que par une eſpece de rotation, en ſe tranſportant d'abord en Qk, puis en QR, puis en Qr, & de-là en QS. Mais comme la portion de Fluide $KQSR$ eſt fort petite, il eſt permis de n'y avoir aucun égard.

Lorſque la partie $KQSR$ eſt fort grande comme dans la Figure 45, alors il faut imaginer que la partie KQ parvient en QR par une eſpece de rotation, & de même que la partie qr parvient en qS par une eſpece de rotation, & que la partie $QRrq$ ſe meut de a vers ai: donc nommant s les parties ao de la ligne ai, on aura $\int dx\,(pdt - dv) + \int ds\,dv = \int dz\,(pdt + dv)$.

Remarque II.

128. Si la branche $PLSQ$ (Fig. 44) eſt infiniment grande par rapport à la branche $CDKQ$, en ce cas le Fluide deſcendra dans la branche $CDKQ$ ſans monter ſenſiblement dans la branche $PLQS$, & par conſéquent BE pourra être regardée comme une conſtante qu'on ſuppoſera égale à b. Dans ce cas, ſi on nomme CD, k, AZ, q, la différence des forces vives d'un inſtant à l'autre, ſera $2Nudu - \frac{uu\,.\,dq\,.\,GH^2}{k}$; il faudra faire cette quantité égale à $-2p\,.\,kdq\,(q-b)$, & l'on aura une Equation d'où l'on tirera l'expreſſion de la viteſſe.

REMARQUE III.

129. Dans la solution du Problême précedent, nous avons supposé que les tranches *CD*, *PL* conservoient dans leur mouvement une situation horizontale, & ce que nous avons appellé leur vitesse, n'étoit, à proprement parler, que leur vitesse estimée suivant la direction verticale : desorte que la conservation des forces vives n'a lieu dans notre solution qu'improprement. On pourroit supposer que le Fluide se mût de maniére que les surfaces *CD*, *PL*, fussent perpendiculaires aux parois du Tuyau. C'est d'après cette supposition, que M. *Daniel Bernoulli* a résolu le Problême dont il s'agit ici. On peut encore appliquer très-aisément nos Principes à ce cas-là, & faire voir que la conservation des forces vives y a lieu, étant prise dans son sens propre. C'est peut-être en partie cette raison qui a déterminé M. *Daniel Bernoulli* à supposer que les surfaces *CD*, *PL* étoient perpendiculaires aux parois du Tuyau.

Comme notre Principe s'applique également à l'un & à l'autre cas, c'est à l'Expérience à décider laquelle des deux suppositions l'on doit suivre. Il est certain que la vitesse du Fluide estimée suivant la longueur d'une des branches dans le second cas, sera à cette même vitesse dans le premier cas, comme le quarré du Sinus d'inclinaison de cette branche est au quarré du Sinus total, au moins en supposant que chaque branche soit cylindrique. D'où l'on voit que la vitesse du Fluide sera fort diffé-

rente dans les deux cas, & qu'ainsi la longueur d'un Pendule isocrone aux vibrations du Fluide, ne doit pas être la même dans le premier cas que dans le second. M. *Daniel Bernoulli* dit que les Expériences qu'il a faites là-dessus s'accordent avec sa Théorie, autant qu'il a pû en juger ; cependant il ne paroît pas donner ces Expériences pour bien exactes. *

Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase par plusieurs ouvertures à la fois.

130. Soit un vase $ACPLQRplDB$, (Fig. 46) de figure quelconque, & duquel s'écoule par deux ouvertures différentes PL, pl, un Fluide renfermé dans ce vase, & dont la surface supérieure soit CD ; il est évident 1°. que les particules du Fluide doivent à un certain point s se séparer pour sortir les unes par l'ouverture PL, les autres par l'ouverture pl. 2°. Que quand la tranche cs est parvenue en xO, la tranche sd parvient en $q\delta$. 3°. De plus, il faut que la vitesse de la tranche xO soit la même que celle de la tranche $q\delta$. Car soit v la vitesse des tranches cs, sd, qui est la même pour toutes les deux, u celle de la tranche xO, u celle de $q\delta$, il est clair que la tranche cs animée de la vitesse $v - u$, & la tranche sd animée de la vitesse v — u doivent être en équilibre avec les autres tranches. Or il ne pourroit y avoir d'équilibre (*art.* 36.) si $v - u$ n'étoit pas = à v — u. donc u = u. 4°. De-là il s'ensuit que les Courbes sO,

* Hydrodyn. pag. 122. 123.

sq doivent être telles dans leur origine, que xO ſoit à $cs :: q\delta . sd$. car on a $v . u :: xO . cs$ & $v . u :: q\delta . sd$. donc &c. 5°. Si on nomme u la viteſſe de la tranche cd, V la viteſſe d'une tranche quelconque KZ de la partie $CDdc$, v celle d'une tranche quelconque YV de la partie $sOLPC$, v celle d'une tranche quelconque yu de la partie $sqplc$, on aura $V = \frac{u(cs + sd)}{KZ}$, $v = \frac{u . cs}{YV}$; $v = \frac{u . sd}{yu}$: & appellant les indéterminées EF, X; GH, x; gh, x; il faudra que $cs . \int(pdt - dV) \times dX . = cs . \int(pdt - dv)\, dx$, & que de même $sd \times (\int pdt - dV) dX = sd . \int(pdt - dv)\, dx$. Donc ſi on appelle N, ce que devient la quantité $\int \frac{cd^2 . dX}{KZ}$, lorſque $X = ES$; n, ce que devient la quantité $\int \frac{cs^2 . dx}{YV}$ lorſque $x = GM$; n, ce que devient la quantité $\int \frac{sd^2 . dx}{yu}$ lorſque x $= gm$; enfin, qu'on appelle les lignes ES, q; GM, a; gm, b; CD, k; PL, K; pl, K; cs, m; sd, m: on aura $- 2KKmkkpqdq - 2KKkmNudu + KKmdq \times (kk - [m + \mathrm{m}]^2) - 2KKmkkpadq - 2KKknudu \times + (m + \mathrm{m})\, uukkmdq\, (mm - KK) = 0$.

On aura de même une autre Equation qui ne différera de celle-ci qu'en ce qu'il y aura K pour K, m pour m, n pour N, & ces Equations ſerviront à déterminer la viteſſe u. Mais comme on tire une valeur de u de cha-

cune de ces Equations, il faut que le point s & les Courbes sqR, sOQ, soient tels que les deux valeurs de u déterminées par ces Equations, soient égales.

REMARQUE I.

131. La solution précedente ne nous fait point connoître le point s ni les Courbes sqR, sOQ : nous savons seulement que ce point s doit être tel 1°. que xO soit à $cs :: q\delta : sd$. 2°. que l'on tire des deux Equations du Problême la même valeur de u. Mais si on supposoit que les lignes sqR, sOQ fussent des lignes droites, ce qu'on peut supposer sans erreur sensible, puisque les quantités n & n demeureront toujours à peu près les mêmes; alors les deux conditions dont nous venons de faire mention, serviroient à déterminer le point s.

COROLLAIRE I.

132. Si les ouvertures PL, pl sont fort petites, on trouvera que la vitesse du Fluide qui sort par PL est = à $\sqrt{(2p[q+a])}$, & que de même la vitesse du Fluide qui sort par pl, sera égale à $\sqrt{(2p[b+q])}$; d'où l'on voit qu'alors cs doit être à $sd :: PL \times \sqrt{(a+q)}$ est à $pl \times \sqrt{(b+q)}$: car la vitesse de cs & celle de sd doivent être égales.

COROLLAIRE II.

133. Si $CYPLsyplD$ (Fig. 47) est un vase de figure quelconque, dans lequel les ouvertures PL, pl, soient

à la même hauteur, & qui soit tel que les tranches ou ordonnées *YV*, *yu* soient toujours entr'elles comme *cs* à *sd*, ou comme *PL* à *pl*, on tirera dans le cas de l'*article* 130. la même valeur de *u* de chacune des Equations qui la renferment, & la vitesse du Fluide sortant par *PL*, & par *pl* sera la même que celle du Fluide qui sortiroit d'un vase simple qui n'auroit qu'une seule ouverture égale à $PL + pl$, & dont les ordonnées seroient égales à la somme des ordonnées correspondantes $YV + yu$.

COROL. III.

134. Si le point *s* est infiniment proche de *PL* & de *pl*, & que *cs* soit à *sd* comme *PL* à *pl*, on tirera des deux Equations de l'*article* 130. la même valeur de *u*. Car alors $n = o$, $n = o$ & $Km = Kn$. Donc &c.

COROL. IV.

135. Donc si un vase *ABXK*, (Fig. 48) est percé de deux ouvertures *PL*, *pl*, on peut supposer que la vitesse du Fluide qui sort par *PL*, est la même que celle du Fluide qui sort par *pl*. Car le point *S* où les particules du Fluide se séparent, ne doit pas être fort éloigné du fond (*article* 111.). De plus, on doit supposer (*art.* 130. *n.* 4.) que *cs* est à *sd* comme *PL* à *pl*, puisque *cs* & *sd* sont infiniment proches de *PL* & de *pl*. Donc &c.

Corol. V.

136. Donc le Fluide qui sort d'un pareil vase, sort avec la même vitesse avec laquelle il sortiroit de ce même vase, s'il n'y avoit qu'une seule ouverture égale à $PL + pl$.

Remarque II.

137. La Théorie du mouvement des Fluides, lorsque les vases ont plus de deux ouvertures, dépend des mêmes Principes que nous venons d'établir. C'est pourquoi il est inutile de nous arrêter plus longtems là-dessus.

Du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase submergé dans un autre Fluide.

Problême VII.

138. *Un vase de figure quelconque* CDPL (Fig. 49) *étant supposé rempli de Fluide jusqu'en* CD, *& plongé dans un vase* VRMZ *rempli du même Fluide jusqu'en* VZ, *on demande la vitesse avec laquelle la surface* CD *descend à chaque instant.*

Il est évident, que tandis que la surface CD descend en cd, le Fluide $VNKZ$ monte en uz avec une vitesse qui est à celle de CD, comme CD à $VN + KZ$, & qu'en général la vitesse d'une tranche quelconque $py + rq$ de la portion de Fluide $TEZKLPNVT$, sera toujours à la vitesse de CD comme CD à $py + rq$.

Donc si on nomme z les différentes parties Xe de la ligne EX, x les différentes parties AO de la ligne AB, v les vitesses des différentes tranches du Fluide $CDPL$, v celles des différentes tranches du Fluide $TEZKLPNVT$, on aura $\int dx(pdt - dv) = \int dz(pdt + dv)$. Equation d'où l'on tirera la valeur des inconnues que l'on cherche, & de laquelle on peut conclure que la somme des forces vives de la masse $CDPL + TVNPLKZE$ est égale au produit de cette masse par le double de la quantité dont son centre de gravité est descendu.

COROLLAIRE I.

139. Si le vase $VRMZ$ est indéfini en largeur, on pourra supposer que la somme des forces vives de la masse $TVNPLKZE$ est $EX.(VN + NZ).\frac{uu.GH^2}{(VN+NZ)^2} = \frac{EX.uu.GH^2}{VN+NZ}$. Or comme $VN + NZ$ est supposé très-grande, on peut négliger cette quantité, & n'avoir égard qu'à la somme des forces vives du Fluide $CDLP$. De plus, il est évident que la surface $VN + NZ$ ne peut monter à chaque instant que d'une quantité infiniment petite du second ordre, & par conséquent d'une quantité infiniment petite du premier, dans un tems fini. Donc EX peut être regardée comme une constante: & par conséquent le produit de la masse $CDLP + TVNPLKZE$ par la descente de son centre de gravité, sera à chaque instant égal à $2CDdc \times (AO - EX)$.

Ainſi pour trouver le mouvement du Fluide lorſque le vaſe eſt indéfini, il faut ſuppoſer la différence des forces vives du Fluide $CDLP =$ à $2 . CDdc . (AO - EX)$.

COROL. II.

140. Lorſque le Fluide *CDLP* eſt deſcendu juſqu'à une certaine profondeur, alors l'action du Fluide extérieur l'oblige de rentrer dans le vaſe. Il faut ſuppoſer pour lors $\int dx\,(pdt + dv) = \int dz\,(pdt - dv)$, & le Problême n'a aucune difficulté nouvelle.

SCOLIE I.

141. On aura peut-être quelque peine à concevoir de quelle maniére la partie du Fluide qui ſort du vaſe à chaque inſtant, change de direction pour ſe mouvoir de *E* vers *X* dans un ſens contraire à celui dont elle ſe mouvoit. Pour l'imaginer plus aiſément, il n'y a qu'à regarder le Fluide qui ſort par *PL* comme composé de deux parties, qui après être deſcendues verticalement enſemble au ſortir du vaſe par un eſpace très-petit, changent enſuite de direction peu à peu, pour aller l'une vers *KZ*, l'autre vers *NV*, à peu près de la même maniére qu'un Fluide change de direction (*article* 127.) pour paſſer d'une branche de Syphon dans l'autre. Ainſi un vaſe *GHPL* plongé dans un Fluide, peut être regardé comme formant avec *ZMRV* une eſpece de double Syphon; d'où il réſulte, que ce que nous avons dit ci-deſſus du mouvement d'un Fluide dans un vaſe qui a deux ouvertures,

tures, & du mouvement d'un Fluide dans un Syphon, auroit pû nous conduire à la Théorie du mouvement d'un Fluide dans un vaſe qui eſt plongé dans un autre Fluide.

COROL. III.

142. De-là & des *art.* 128, 139 *&* 140, il s'enſuit que ſi le vaſe $CDLP$ eſt un vaſe Cylindrique plongé dans un vaſe indéfini, on aura, en appellant la conſtante CD, k; u la viteſſe de CD; AB, q; EX, b; & faiſant $uu = 2ps$, l'Equation $qds - sdq = -dq(q-b)$.

Si le Fluide $CDPL$ au lieu de deſcendre, étoit obligé à monter par l'action du Fluide extérieur, on auroit $qds + sdq = (b-q)dq$.

SCOLIE II.

143. Il eſt à remarquer 1°. qu'aucune de ces deux Equations ne s'accorde avec celles qu'a données M. *Daniel Bernoulli* p. 126. & 135. de ſon Hydrodynamique pour le cas dont il s'agit ici : mais les Equations qu'a données ce ſavant Geométre, ſont fondées ſur le Principe de la conſervation des forces vives, dans la ſuppoſition, que la viteſſe du Fluide qui entre ou qui ſort par l'ouvertûre PL, varie bruſquement en un inſtant d'une quantité finie, ſuppoſition qui paroît avoir quelque choſe de choquant, & dans laquelle outre cela on ne ſauroit faire uſage du Principe des forces vives, comme nous l'avons déja dit.

2°. Les Equations que nous avons trouvées, ne dé-

pendent ni de la largeur CD, ni de l'ouverture PL, ce qui eſt aſſez ſingulier. Cela vient de ce que nous avons ſuppoſé la quantité N de l'*art.* 128. égale à kq dans le cas de l'*art.* 142. Cependant il eſt aiſé de voir par l'*art.* 112, que cette quantité N n'eſt pas exactement kq. Mais tant que l'ouverture PL n'eſt pas infiniment petite, on peut ſuppoſer $N = kq$ ſans erreur ſenſible. Si PL eſt infiniment petite, alors la valeur de PL doit entrer dans l'expreſſion de N; mais cette quantité eſt alors fort difficile à déterminer, parce qu'on ignore (*art.* 111.) quelles Courbes décrivent les particules pour s'approcher de PL.

Du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe traverſé de pluſieurs diaphragmes.

144. Lorſqu'une maſſe de Fluide $CDQK$ (Fig. 50) ſort d'un vaſe $ABQK$ traverſé par pluſieurs diaphragmes RS, EF, &c. qui ſont percés des ouvertures GH, MN, PL; il eſt conſtant, ainſi que nous l'avons déja remarqué, que les particules du Fluide qui ſont proches de chaque diaphragme s'approchent de l'ouverture dont elles ſont voiſines par des lignes très-obliques dH, eG; &c. par la même raiſon elles doivent, à la ſortie de chaque ouverture, s'en écarter ſuivant des lignes très-obliques $G\epsilon$, $H\delta$, pour venir remplir la place que leur laiſſe le Fluide inférieur, qu'elles auroient beaucoup plus de peine à diviſer. Il ſemble donc qu'on peut regarder un Fluide qui ſe meut dans un tel vaſe, comme s'il ſe mouvoit dans

un vase tel que le représente la Figure 51, qui fût, pour ainsi dire, étranglé en GH, MN, PL; & en appliquant à cette sorte de vase, ce que nous avons dit sur le mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase de figure quelconque, on trouvera les Loix du mouvement d'un Fluide qui sort d'un vase tel que celui dont il s'agit. On aura donc, en conservant les noms de l'*art.* 105. l'Equation même que nous avons donnée dans cet article pour le cas d'un vase de figure quelconque.

D'où il est aisé de voir 1°. que si les ouvertures PL, MN, GH &c. sont fort petites, la vitesse du Fluide au commencement du mouvement sera fort différente de ce qu'elle auroit été, si le vase n'eût point eu de diaphragme & n'eût été percé que de la seule ouverture PL.

2°. Que quand la surface CD sera descendue d'une quantité infiniment petite, alors la vitesse du Fluide sortant par PL, sera $=$ à $\sqrt{[2p.q]}$, précisément comme s'il n'y avoit que cette ouverture PL sans aucun diaphragme.

SCOLIE.

145. Au reste, je ne prétends pas donner pour exactement vrayes les Loix que je viens d'exposer dans l'article précedent: comme il s'agit ici d'un Fluide qui coule dans un vase de figure très-irréguliére, il se pourroit faire que le mouvement du Fluide ne pût être soumis au calcul, à cause de son irrégularité.

M. *Daniel Bernoulli* a même donné dans son Ouvrage

des Loix fort différentes de celles que je viens d'établir; mais comme ces Loix ne sont appuyées que sur le Principe des forces vives, qu'il applique même au cas dont il s'agit avec une espece de tatonnement, j'avoue que je ne puis pas en être entiérement satisfait, & je regarde l'Expérience comme le meilleur moyen par lequel on puisse découvrir les Loix du mouvement du Fluide dans le cas dont il s'agit.

De la pression qu'un Fluide qui se meut dans un vase, exerce contre ses parois.

146. Puisque (*art.* 100.) $\frac{pdx}{v} - dv$ représente la petite vitesse avec laquelle chaque tranche devroit tendre à se mouvoir pour rester en équilibre, il s'ensuit que $\frac{pdx}{vdt} - \frac{dv}{dt}$ représente la force accélératrice indéterminée, en vertu de laquelle chaque tranche resteroit en repos. Donc (*n.* 2. *art.* 23.) à une hauteur quelconque AO, x, (Figure 32) la pression est $\int pdx - \int \frac{dxdv}{dt} = p . AO - (\frac{2Ndu + uudN}{2 . dt . u . GH})$.

Il est à remarquer que l'Aire N ($\int \frac{GH^2 dx}{y}$) doit être prise ici depuis la surface CD jusqu'à la tranche KZ dont on cherche la pression; que $dt = \frac{k . Ff}{u . GH}$, & que $dN = Ff . GH^2 . (\frac{CD^2 - KZ^2}{KZ^2 . CD})$.

De plus, ſi l'on fait $uu = 2ps$, comme la valeur de u eſt connue par les Problêmes précedens, on aura par ces mêmes Problêmes la valeur de ds en Ff. Donc la preſſion ſera exprimée en termes tout finis, dont chacun ſera affecté de la quantité p.

COROLLAIRE I.

147. Si on ſuppoſe $p \, . \, AO - (\frac{2Nudu + uudN}{2Ff \, . \, k}) = p \, . \, r$, on aura la hauteur r dûe à la viteſſe avec laquelle le Fluide s'échapperoit, ſi l'on faiſoit une petite ouverture en Z. Car conſidérant toutes les tranches comme animées de la force $p - \frac{dv}{dt}$ qui les retient en équilibre; il eſt clair (*art.* 108.) que pour avoir la hauteur r dûe à la viteſſe avec laquelle le Fluide s'échapperoit, ſi on faiſoit une ouverture en Z, il faut ſuppoſer $\int (p - \frac{dv}{dt}) \, dx = p \, . \, r$. Donc &c.

La Méthode de M. *Daniel Bernoulli* pour déterminer la preſſion en un endroit quelconque Z, conſiſte à chercher avec quelle viteſſe le Fluide s'échapperoit, ſi on faiſoit en cet endroit une ouverture. Il eſt évident que par cette Méthode on trouve la même valeur que nous venons d'aſſigner à la preſſion : mais il faut avouer auſſi que cette Méthode eſt indirecte.

COROL. II.

148. Il eſt évident que la preſſion eſt nulle en C, D, P, L, c'eſt-à-dire aux endroits du vaſe qui répondent à la ſurface tant ſupérieure qu'inférieure du Fluide. Car 1°. à la ſurface CD, on a $AO = o$, $N = o$. 2°. à la ſurface PL, on a par les ſolutions des Problêmes précedens $\int dx \,.\, (p - \frac{dv}{dt}) = 0$. Cette propoſition eſt d'ailleurs aiſée à démontrer par le *n.* 2. *art.* 23.

COROL. III.

149. Si la quantité indéterminée $\int dx\, (p - \frac{dv}{dt})$ dont les deux valeurs extrêmes ſont zero, comme nous venons de le voir, a pour une hauteur quelconque AO, une valeur négative, alors le Fluide ceſſera (*art.* 103.) d'être continu dans le Tuyau, au moins ſi on fait abſtraction de l'adhérence des parties.

M. *Daniel Bernoulli* prétend qu'alors la preſſion doit ſe changer en ſuction; mais cela me paroît fort difficile à concevoir. Car tout ce qui arrive alors, ce me ſemble, c'eſt que la tranche KZ au lieu d'être preſſée de A vers O, eſt preſſée de O vers A; or ſoit que la tranche KZ ſoit preſſée de O vers A, ou de A vers O, la preſſion ne réagit pas moins contre les parois du vaſe ſuivant des lignes perpendiculaires à ces parois.

COROL. IV.

150. A l'égard de la force qu'il faut employer pour ſoutenir le vaſe, cette force eſt égale (*n.* 1. *article* 23.) à $\int y\,dx\,(p - \frac{dv}{dt}) - \int PL\,.\,dx\,(p - \frac{dv}{dt})$, ou ſimplement à $\int y\,dx\,(p - \frac{dv}{dt})$; dans cette derniére quantité, la partie $\int p \times y\,dx$ eſt égale au poids total du Fluide contenu dans le vaſe, & la partie $\int \frac{ydx\,.\,dv}{dt}$ eſt égale à $\int \frac{ydx\,.\,(ydu - udy)\,.\,GH}{yydt} = \frac{AB\,.\,udu\,.\,GH^2}{k\,.\,Ff} + \frac{uu\,.\,GH^2\,.\,(k - K)}{K\,.\,k}$. On aura donc la valeur de la force qu'on cherche.

Si PL eſt fort petite, on aura pour lors (*art.* 108.) $uu\,.\,GH^2 = 2p\,.\,AB\,.\,KK$, & l'expreſſion de la force cherchée ſe réduit alors à $\int py\,dx$.

Ainſi lorſqu'un Fluide s'écoule d'un vaſe par une très-petite ouverture, la puiſſance néceſſaire pour ſoutenir le vaſe eſt égale au poids du Fluide.

REMARQUE.

151. Au reſte, dans la détermination que nous venons de donner de la preſſion, nous faiſons abſtraction de l'effort que le Fluide peut faire contre le vaſe par ſon mouvement. Car comme l'obſerve M. *Jean Bernoulli* dans ſon Hydraulique, un Fluide qui deſcend dans un vaſe qui va en ſe rétréciſſant, frappe les côtés du vaſe avec une

certaine obliquité, & la force qui en résulte peut altérer celle qui provient de la pression ; nous ne croyons pas cependant que l'effet de cette force doive être fort sensible, parce qu'il y a apparence que les particules contigues au vase, ont des mouvemens obliques & paralléles aux côtés du vase. Or ce sont ces particules qui devroient influer le plus dans l'effet dont il s'agit.

Des Fluides qui se meuvent dans des vases mobiles.

PROBLÊME VIII.

152. *Trouver la vitesse d'un Fluide qui sort d'un vase de figure quelconque, entraîné par un poids* M (Fig. 52).

Soit p la pesanteur tant du poids que du Fluide, u la vitesse qu'auroit la surface GH en faisant abstraction de son mouvement commun avec le vase, v la vitesse indéterminée des tranches du Fluide au-dedans du vase, v la vitesse variable avec laquelle le poids descend en enbas, & le vase monte en enhaut; il est évident que $v - \mathrm{v}$ sera la vitesse absolue de chaque tranche du Fluide à chaque instant. Dans l'instant suivant cette vitesse se changeroit en $v - \mathrm{v} + \frac{p\,dx}{v}$, si rien ne s'opposoit au mouvement naturel de chaque tranche, mais par la résistance du poids & l'action mutuelle des tranches, elle se trouve changée en $v + dv - \mathrm{v} - d\mathrm{v}$. Il faut donc regarder la vitesse $v - \mathrm{v} + \frac{p\,dx}{v}$ comme composée de la vitesse

$v +$

$v + dv - \text{v} - dv$, & de la viteſſe $\frac{pdx}{v} + d\text{v} - dv$ qui doit être anéantie.

De même le poids M tend à ſe mouvoir avec une viteſſe $= \text{v} + \frac{pdx}{v}$, mais comme cette viteſſe ſe change en $\text{v} + d\text{v}$, il s'enſuit que la viteſſe $\frac{pdx}{v} - d\text{v}$ doit être détruite.

De-là il s'enſuit 1°. que les tranches du Fluide animées de la viteſſe $\frac{pdx}{v} + d\text{v} - dv$, doivent être en équilibre au-dedans du vaſe. 2°. Que la preſſion qui en réſulte contre le vaſe, doit être égale à l'effort du poids M animé de la viteſſe $\frac{pdx}{v} - d\text{v}$: on aura donc ces deux Equations

$$\int dx \left(\frac{pdx}{v} + d\text{v} - dv\right) = 0,$$

& $M\left(\frac{pdx}{v} - d\text{v}\right) = \int y\,dx \left(\frac{pdx}{v} + d\text{v} - dv\right) - PL \times$

$\int dx \left(\frac{pdx}{v} + d\text{v} - dv\right)$;

ou (diviſant le tout par la conſtante $dt = \frac{dx}{v}$, & faiſant $d\text{v} = \pi dt$)

$$[p + \pi].AB - \int \frac{dx\,dv}{dt} = 0;$$

$$\& \; M(p - \pi) = \int [p + \pi].y\,dx - \int \frac{y\,dx.dv}{dt}.$$

On remarquera que les valeurs de $\int dx\,dv$ & de $\int y\,dx\,dv$ ont été trouvées dans les *articles* 96. & 151. Mettant

donc ces valeurs dans les Equations précedentes, on tirera de chacune de ces Equations une valeur de π; & la comparaiſon de ces deux valeurs, donnera une nouvelle Equation dans laquelle ſe trouveront uu & udu, & qui pourra être intégrée par les Méthodes connues; u étant connue, on aura la valeur de π; & on connoîtra par conſéquent l'eſpace que le poids M a parcouru en deſcendant & le vaſe en montant, dans le tems que la ſurface CD s'eſt abaiſſée d'une quantité quelconque. Car ſoit ζ la quantité dont le poids M eſt deſcendu, lorſque CD eſt à une diſtance quelconque s de PL, on aura $\frac{d\zeta}{v} = -\frac{kds}{u.GH}$, & $\pi d\zeta = v dv$: deux Equations d'où l'on tirera facilement les valeurs de v & de ζ.

COROLLAIRE I.

153. Si c'étoit le vaſe qui entraînoit le poids, au lieu qu'on a ſuppoſé que c'étoit le poids qui entraînoit le vaſe, il n'y auroit d'autres changemens à faire dans les calculs précedens, que de ſuppoſer π négatif.

COROL. II.

154. Si l'ouverture PL eſt fort petite, & qu'on faſſe $\frac{u^2 . GH^2}{PL^2} = 2pr$ pour avoir la hauteur r dûe à la viteſſe de l'eau qui ſort, abſtraction faite de la viteſſe du vaſe, on trouvera $(p + \pi) . AB = p . r$, & en appellant μ la maſſe du Fluide,

$$M(p-\pi)=[p+\pi].\mu.$$

Donc $\pi=\frac{(M-\mu).p}{M+\mu}$, & $r=\frac{2M.AB}{M+\mu}$.

Ce qui s'accorde avec ce qu'a trouvé M. *Daniel Bernoulli* Sect. XI. *art.* 19. de son Hydrodynamique, par une Méthode fort différente de la nôtre, & pour le seul cas d'un vase Cylindrique percé d'un petit trou.

COROL. III.

155. Nous ne nous arrêterons point à déterminer ici les cas où le Fluide doit cesser d'être continu dans le Tuyau, ni la quantité de la pression que le Fluide exerce contre le vase en un endroit quelconque. Tout cela doit être facile à trouver par les Méthodes que nous avons données pour cela dans les *art.* 98. & 103.

PROBLÊME IX.

156. *Trouver le mouvement d'un Fluide* CABD, (Fig. 53) *renfermé dans un vase* ACDL *entraîné par un poids* K.

1°. Il est évident que la surface AB du Fluide doit s'incliner. Car la pesanteur du Fluide suivant al doit se décomposer en deux forces, dont l'une soit suivant ab paralléle à CG, & l'autre soit détruite. Or cette derniére force ne peut être détruite, qu'elle ne soit perpendiculaire à la surface du Fluide : donc si on appelle p la pesanteur du Fluide & du Corps, π la force suivant ab, commune au Fluide & au Corps, φ la force suivant aq qui doit être détruite ; LB, x, AL, a, on aura $p.\pi::AL.LB$;

donc $\pi = \frac{px}{a}$. Il faut, de plus, que le poids K animé de la force $p - \pi$ ſoit en équilibre avec le Fluide animé de la force φ ſuivant aq : or ſi le vaſe n'étoit point ſoutenu en CD, il ſeroit preſſé ſuivant aq (*art.* 14.) avec une force $=$ à $\varphi . ACDB$: la force qui en réſulte ſuivant DC eſt $\varphi . \frac{ACDB \times ql}{aq} = \pi . ACDB$. Donc nommant M la maſſe $ACDB$, on aura $K\,(p - \frac{px}{a}) = \frac{M.px}{a}$, d'où l'on tire $x = \frac{aK}{M + K}$ & $\frac{x}{\sqrt{[aa + xx]}}$ ou le Sinus de l'Angle $LAB = \frac{K}{\sqrt{[MM + 2MK + 2KK]}}$.

SCOLIE.

157. Il eſt à remarquer que la preſſion contre un point quelconque O eſt proportionnelle à $\varphi . KO$. ou, ce qui eſt la même choſe, à $p . AO$, à cauſe que $p . \varphi :: al . aq :: KO . AO$.

Méthode pour déterminer les endroits où doit ſe diviſer un Fluide qui coule dans un vaſe.

Après avoir déterminé dans les *articles* 98. & 103. en quels cas le Fluide doit néceſſairement ſe diviſer en pluſieurs portions, il nous reſte à chercher en quels endroits le Fluide doit ſe diviſer ; nous ſuppoſerons d'abord qu'on faſſe abſtraction de l'adhérence des parties.

158. PROPOS. I. *Tous les endroits* KZ (Fig. 54) *où*

le Fluide se divise, doivent conserver dans l'instant de la séparation la même vitesse qu'ils avoient auparavant.

Car le Fluide ne se divise, que parce que la masse *CDZK* n'a point d'action sur la masse *KZLP*; donc ces deux masses doivent être regardées comme entiérement séparées l'une de l'autre : or, cela posé, la vitesse de la petite Couche *KZTS* ne peut (*art.* 98.) que demeurer la même, ou diminuer; celle de la petite Couche *FGZK* ne peut au contraire que demeurer la même, ou augmenter : mais si la vitesse de *FGZK* augmentoit tandis que celle de *KZTS* diminue, le Fluide ne se diviseroit pas en *KZ*, contre l'hypothese. Donc la vitesse de *FGZK* & celle de *KZTS* doivent demeurer les mêmes. *Ce Q. F. D.*

159. Propos. II. *On suppose que toutes les tranches* CD, KZ, PL, &c. *d'une masse de Fluide donnée* CDLP *sont animées par des forces accélératrices, qui tendent toutes de* A *vers* B, *& qui soient représentées par les ordonnées correspondantes* cd, kz, pl, *de la Courbe* dzl; *on suppose encore que ces tranches n'ayent aucune autre impulsion que celle qu'elles reçoivent de l'action de ces forces : & on demande la vitesse que doit prendre chaque tranche.*

Solution. Soit décrite la Courbe *euf*, dont les ordonnées *ce*, *ku*, *pf &c.* soient entr'elles en raison inverse des ordonnées correspondantes *CD*, *KZ*, *PL &c.* & qui ait de plus cette propriété que l'Aire *ceufpc* soit égale à l'Aire *cdzlpc*.

Cela posé, il est évident que si on nomme *AO*, *x*, *zk*, *s*,

$ku = r$, on aura $den - nfl = o$ & $\int dx\,(s - r) = o$.

Donc 1°. si $\int dx\,(s - r)$ n'a aucune valeur négative, les lignes *ce*, *ku*, *pf* &c. représenteront les vitesses des différentes tranches du Fluide, qui ne doit faire pour lors en coulant qu'une masse continue (*art.* 99.)

2°. Si $\int dx\,(s - r)$ a des valeurs négatives, alors le Fluide doit nécessairement se diviser, & on se souviendra (*art.* 158.) que dans l'endroit où il se divise, la force accélératrice ne doit point être altérée. Il faut donc que la Courbe *ebnf* (Fig. 55) soit alors tellement placée, que l'Aire $abnfp = abnlp$ & que la quantité $\int dx\,(s - r)$ n'ait aucune valeur négative depuis *a* jusqu'en *p*. Si cette double condition peut être observée (& elle le sera toujours quand les forces accélératrices des tranches inférieures du Fluide seront entr'elles en plus grande raison, que la raison inverse des tranches correspondantes), alors la portion de Fluide comprise entre les deux tranches correspondantes à *ab* & à *pl*, descendra en formant une masse continue, les vitesses infiniment petites de chaque tranche étant représentées par les ordonnées correspondantes, *ab*, *uk*, &c : il faudra chercher ensuite le mouvement de la portion de Fluide, qui est depuis *c* jusqu'en *a* en regardant cette portion comme entiérement distinguée de l'autre.

3°. Si la double condition dont nous venons de parler ne sauroit être observée, en ce cas il faudra que la Courbe *ehuf* (Fig. 56) soit placée de maniére qu'elle coupe *dzl* en deux points *h*, tels, que l'Aire $ghoq = ghriztoq$,

& que $\int dx\,(s-r)$ n'ait aucune valeur négative depuis g, jusqu'en q. En ce cas toutes les tranches depuis g jusqu'en q seront mues avec une vitesse infiniment petite, représentée par l'ordonnée correspondante de la Courbe *huo*; toutes les tranches depuis q jusqu'en p, se sépareront les unes des autres; & à l'égard des tranches depuis c jusqu'en g, il faudra chercher leur mouvement en les regardant comme formant une masse entiérement séparée du reste du Fluide.

Il est évident que par la combinaison des Méthodes précedentes, on trouvera tous les endroits, où le Fluide doit se diviser. Car après avoir, par exemple, déterminé dans le cas du *n.* 3. le point a (Fig. 55) qui répond à celui où le Fluide doit se diviser, on regardera la masse depuis a jusqu'en c, comme une masse isolée à laquelle on appliquera les Méthodes expliquées dans les trois nombres précedens, pour voir si cette masse doit se séparer en deux ou en plusieurs portions. Je dis en deux ou en plusieurs. Car il n'est pas douteux que cette masse ne doive se diviser au moins en deux portions. En voici la preuve. Si elle ne se divisoit pas, la vitesse de la tranche qui répondroit au point a, & qui seroit la tranche inférieure de cette masse, ne pourroit que rester la même ou augmenter (*art.* 99.) 1°. Si cette vitesse restoit la même, en ce cas, les tranches depuis c jusqu'en a ne feroient plus qu'une même masse avec les tranches depuis a jusqu'en p, & alors on retomberoit dans le cas du *n.* 1. 2°. Si la vitesse augmentoit, on ne pourroit pas suppo-

ser que le Fluide se divisât au point qui répond à *a*.

4°. Enfin, si aucune des conditions énoncées dans le *n*. 3. précedent, ne peut être observée, en ce cas toutes les tranches du Fluide se sépareront les unes des autres, & cela arrivera par exemple, si toutes les forces accélératrices sont entr'elles en moindre raison, que la raison inverse des tranches qu'elles animent.

160. REMARQUE I. Nous avons supposé ci-dessus, que toutes les forces accélératrices *cd*, *kz*, *&c.* étoient dirigées de *A* vers *B* (Fig. 54). Mais si les unes sont dirigées de *A* vers *B*, & les autres en sens contraire, c'est-à-dire si la Courbe *dzl* (Fig. 57 & 58) a des ordonnées positives & négatives, en ce cas il faudra tracer la Courbe *frxm* dont les ordonnées *tu* soient proportionnelles aux Aires *cdhzk* correspondantes. Cela posé,

1°. Si aucune des ordonnées *tu* (Fig. 57) n'est négative, la Méthode sera la même que dans l'art. précedent.

2°. Si quelqu'une des ordonnées *tu* (Figure 58) est négative, en ce cas il faudra d'abord trouver le point *x* par où passe l'extrêmité de la plus grande des ordonnées négatives; & il est clair (*art.* 26.) que l'on pourra regarder le Fluide comme composé de deux parties, dont l'une terminée par les tranches qui répondent aux points *n* & *c* est pressée suivant *nc*, l'autre terminée par les tranches qui répondent aux points *n*, *p*, est pressée suivant *np*. On regardera ces deux portions comme deux masses séparées l'une de l'autre; on cherchera par la Méthode du Problême précedent, le mouvement des tranches depuis *n* jusqu'en

jusqu'en *p*, qui doit être suivant *np*, & par la même Méthode, on cherchera (en renversant la Figure, pour ne se point embarrasser) le mouvement des tranches depuis *n* jusqu'en *c*, qui doit être suivant *nc*.

Il est à remarquer que la tranche qui répond à *n*, & qui est le terme commun des deux masses, doit n'avoir aucun mouvement (*art.* 158.) puisque sa force accélératrice est nulle ; d'où il s'ensuit que non-seulement les deux masses doivent se séparer l'une de l'autre, mais se diviser aussi chacune en plusieurs portions qu'on trouvera par les Méthodes précedentes.

161. *Remarque II.* Comme la Courbe *dzl* (Fig. 54) est donnée dans le cas de l'*art.* 159. & que la Courbe *eunf* est donnée d'espece, ayant ses ordonnées en raison inverse des tranches correspondantes, on pourra toujours, les quadratures étant supposées, se servir du calcul pour déterminer si les différentes conditions dont nous avons parlé dans les 4 *n.* de l'*article* 159. peuvent avoir lieu ; le calcul à la verité sera plus ou moins difficile selon les différens cas : mais il suffit ici d'avoir réduit le Problême, comme on l'a fait, à une question de pure Geométrie.

162. *Remarque III.* Les Problêmes précedens ne seroient pas plus difficiles, si la force accélératrice étoit nulle dans une partie des tranches du Fluide. Il n'y auroit qu'à supposer alors qu'une portion de la Courbe *dzl* fût coincidente avec son Axe, & que les ordonnées de cette portion fussent nulles.

S

163. Prop. III. *Une masse de Fluide* CDLP (Fig. 54) *coulant de* A *vers* B *en vertu d'une impulsion qui lui a été primitivement imprimée, & n'étant animée d'aucune force accélératrice, trouver les endroits où elle doit se séparer.*

Nous pourrions résoudre immédiatement & directement ce Problême, comme nous avons fait le précedent; mais nous croyons que la Méthode suivante sera plus facile.

On supposera d'abord que le Fluide doive former en coulant une masse continue, c'est-à-dire qu'on déterminera les vitesses dv perdues par chaque tranche, à être telles que $\int dv dx$ soit $= 0$. On cherchera ensuite par le Problême précedent, les endroits où doit se séparer le Fluide, en supposant ses différentes tranches animées des forces accélératrices dv, & le Problême sera résolu.

164. *Remarque.* Il faut observer que la conservation des forces vives a lieu dans le mouvement d'une masse de Fluide qui se sépare en plusieurs parties, comme elle a lieu dans le mouvement d'un Fluide qui forme en coulant une masse continue. Car 1°. la conservation des forces vives a lieu dans toutes les tranches qui se séparent les unes des autres, puisque chacune de ces tranches (*art.* 158. & 159.) conserve sa vitesse. 2°. Elle a lieu aussi dans les parties du Fluide qui se meuvent en formant une masse continue, puisque l'on cherche par la Méthode des *art.* 159. & 163, le mouvement de ces parties, comme si elles formoient une masse Fluide isolée. Donc &c.

Méthode pour déterminer les endroits où le Fluide se divise, en ayant égard à l'adhérence des parties.

165. Nous avons vu (*art.* 44.) que l'on peut imaginer que l'adhérence des particules d'un Fluide, provienne de différentes causes; ou d'une force active appliquée à la surface du Fluide, ou de l'inégalité de ces mêmes parties, ou enfin de la combinaison de ces deux causes. Nous allons déterminer dans quels endroits le Fluide doit se diviser, en parcourant par ordre chacune de ces hypotheses.

I.

166. PROPOS. I. *Si une masse de Fluide, abstraction faite de l'adhérence de ses parties, peut former en coulant une masse continue, elle doit encore former une masse continue, quand on supposera de la tenacité dans ses parties.*

Car pour que le Fluide forme en coulant une masse continue, abstraction faite de l'adhérence de ses parties, il faut que chaque tranche animée de la vitesse dv soit en équilibre, c'est-à-dire que $\int dx\, dv$ soit $= 0$. Or puisque les tranches sont en équilibre (*hyp.*) abstraction faite de l'adhérence de leurs parties, elles y seront encore (*art.* 46.) si on a égard à cette adhérence. Donc elles doivent se mouvoir précisément, comme si elles n'étoient point adhérentes entr'elles.

167. PROPOS. II. *Un Fluide* CDLP, (Fig. 54) *qui, abstraction faite de la tenacité de ses parties, n'auroit pû*

former en coulant une masse continue (parce que $\int dv\,dx$ *auroit eû quelque valeur négative) pourra former en coulant une masse continue, si* $\int dv\,dx$ *est* $= 0$, *lorsque* $x = AB$, *& si* $\int dv\,dx$ *n'a aucune valeur négative plus grande que la force d'adhérence des parties du Fluide.*

Car pour que le Fluide forme en coulant une masse continue, il faut que les tranches animées des vitesses dv, combinées avec la force d'adhérence appliquée en *CD* & en *PL*, soient en équilibre. Or pour cela il faut (*art.* 48. & 52.) que $\int dv\,dx$ soit $= 0$, lorsque $x = AB$, & que $\int dv\,dx$ n'ait aucune valeur négative plus grande que la force d'adhérence appliquée en *CD* & en *PL*. Donc &c.

168. PROPOS. III. *Si on a égard à l'adhérence des parties, je dis que dans l'endroit* KZ *où le Fluide se divise, les particules du Fluide doivent conserver dans l'instant de la séparation la même vitesse qu'elles avoient dans l'instant d'auparavant.*

Car puisque le Fluide ne se sépare en *KZ*, qu'à cause de l'impossibilité qu'il y a que les deux masses *CDZK*, *PLZK* agissent l'une sur l'autre, il s'ensuit qu'on doit regarder chacune de ces masses comme deux masses isolées, dont l'une a sa surface supérieure *CD* pressée par la force d'adhérence, & l'autre a sa surface inférieure *PL* pressée par une force pareille. Il faut donc que les tranches qui composent la portion *CDZK*, animées des vitesses dv, combinées avec la force qui presse en *CD*, soient en équilibre, & que de même les tranches qui

composent la portion *PLZK*, animées des vitesses *dv* combinées avec la force qui presse en *PL* soient en équilibre. Or, cela posé, la tranche *KZ* considerée comme tranche inférieure de la masse *CDZK*, ne peut que conserver la même vitesse, ou en recevoir une plus grande; au contraire, cette même tranche considerée comme tranche supérieure de la masse *PLZK*, ne peut que conserver la même vitesse, ou en recevoir une moindre. Donc &c.

169. Remarque. Il faut observer que pour la verité de cette proposition, on doit supposer que les vitesses de toutes les tranches du Fluide soient représentées par des ordonnées *cd*, *zk*, *pl* &c: qui soient à une ligne continue droite ou courbe, & non pas à deux lignes différentes. Car si par exemple, on avoit un Cylindre *CDLP*, (Fig. 59) rempli de Fluide, tel que toutes les tranches de la partie *CDZK* eussent une vitesse représentée par la droite *DO*, & que les tranches de la partie *KZPL*, eussent une vitesse représentée par la ligne *ZQ* : alors le Fluide se sépareroit en *KZ*, sans que la vitesse *ZQ* ou *ZR* demeurât la même. C'est qu'alors *KZ* est supposée avoir à la fois deux différentes vitesses; savoir la vitesse *ZQ* en tant qu'elle appartient à la partie *KZLP*, & la vitesse *RZ* en tant qu'elle appartient à la partie *CDZK*.

Cette même remarque doit aussi avoir lieu pour la proposition démontrée *art.* 158. dans laquelle on n'a point eu égard à l'adhérence des parties.

170. Propos. IV. *Les mêmes choses étant supposées que*

dans l'art. 159. avec cette condition de plus, qu'on ait égard à l'adhérence des parties du Fluide, trouver les endroits où le Fluide doit ſe diviſer.

1°. On examinera ſi on ne pourroit point trouver une Courbe euf (Fig. 54) dont les ordonnées fuſſent entr'elles en raiſon inverſe des tranches correſpondantes, & qui fut telle que l'Aire $\int dx\ (s-r)$ devint $=0$, en faiſant $x=AB$, & n'eût aucune valeur négative plus grande que la valeur d'une Aire conſtante poſitive A, qu'on prendra pour l'expreſſion donnée de la force d'adhérence. Si cela eſt, le Fluide doit ſe mouvoir en formant une maſſe continue.

2°. Si on ne peut trouver la Courbe euf qu'on cherche, on cherchera, ce qu'il eſt toujours poſſible de trouver, une Courbe qmh (Fig. 60 & 61) dont les ordonnées qg, mn, ph *&c.* ſoient entr'elles en raiſon inverſe des tranches correſpondantes du Fluide, & qui ſoit telle que l'Aire $qgplq - qgphmq = A$, & que la différence d'une portion quelconque $gqin$ ſur l'Aire correſpondante $gqmn$ ne ſoit jamais négative. On cherchera auſſi, ce qu'il eſt toujours poſſible de trouver, une Courbe boa dont les ordonnées ſoient entr'elles en raiſon inverſe des tranches correſpondantes du Fluide, & qui ſoit telle que $cabf - cdrbf = -A$, & que l'excès d'une portion quelconque $caos$ ſur la portion $cdrs$, ne ſoit jamais une quantité négative plus grande que A. Cela poſé, je dis que les parties qui ſont depuis c juſqu'en f, doivent ſe mouvoir en ne formant qu'une maſſe conti-

nue, ainſi que celles qui ſont depuis g juſqu'en p. A l'égard des parties qui ſont depuis f juſqu'en g, on cherchera par la Méthode de l'*art.* 159. leurs mouvemens, en les regardant comme une maſſe ſéparée, dont les parties ne ſont nullement adhérentes entr'elles, parce que dans la recherche du mouvement des parties qui ſont depuis c juſqu'en f, on a eu égard à la force d'adhérence appliquée à la ſurface ſupérieure, & que dans la recherche du mouvement des parties qui ſont depuis g juſqu'en p, on a eu égard à la force d'adhérence appliquée à la ſurface inférieure.

171. PROPOS. V. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*art. 163. *avec cette condition de plus, qu'on ait égard à l'adhérence des particules, trouver les endroits où le Fluide doit ſe diviſer.*

On réſoudra ce Problême par le moyen du Problême précedent, comme on a réſolu le Problême de l'*art.* 163. par le moyen de l'*art.* 159.

COROLLAIRE GENERAL.

172. La conſervation des forces vives a lieu, même quand on a égard à l'adhérence des parties du Fluide. Car 1°. quand le Fluide ne ſe diviſe pas, on a toujours $\int d v d x = 0$, & ainſi la conſervation des forces vives a lieu. 2°. Quand le Fluide ſe diviſe, la conſervation des forces vives a lieu dans la partie moyenne du Fluide, puiſqu'on trouve (*art.* 170. & 171.) le mouvement de cette partie en la regardant comme une maſſe iſolée,

dont les parties ne sont point adhérentes. A l'égard de la partie supérieure & inférieure de la masse Fluide, comme chacune de ces portions ne donne pas $\int dv\,dx = 0$, mais $\int dv\,dx = -A$ pour l'une, & $\int dv\,dx = A$ pour l'autre, la conservation des forces vives n'a pas lieu pour chacune prise séparément, mais elle a lieu pour les deux prises ensemble. Car puisque $\int dv\,dx = -A$ pour l'une, & $= + A$ pour l'autre, il s'ensuit que $\int dv\,dx = 0$ pour les deux prises ensemble. Donc &c.

SCOLIE.

173. Lorsque les lignes qui représentent les vitesses ou les forces accélératrices du Fluide ne sont pas à une Courbe continue, les Méthodes que nous venons d'expliquer peuvent encore être employées avec succès.

Par exemple, dans le cas de l'*art.* 169. il n'y a qu'à regarder les deux lignes OR, QS (Fig. 59) qui sont les Courbes des vitesses des parties $CDZK$, $PLZK$, comme ne formant qu'une même ligne continue avec la ligne RQ, ou, pour aider l'imagination, il n'y a qu'à supposer que les vitesses des différentes tranches du Fluide $CDLP$ soient représentées par les ordonnées de la ligne continue $OrQS$, dont la partie rQ est une ligne droite ou courbe, située à une distance de RQ de tel degré d'infiniment petit qu'on voudra. Par-là on réduira le Problême au cas de la Courbe continue.

Ainsi dans le cas dont il s'agit, il n'y a qu'à diviser la Courbe rQ au point Y, qui soit tel que l'Aire $YQSM = A$, &

& diviſer enſuite cette même Courbe au point T, qui ſoit tel que $TrOX = A$; ou, ce qui revient au même, diviſer la ligne RQ au point y, qui ſoit tel que $yQSM = A$, & diviſer cette même ligne au point t, qui ſoit tel que $RtXO = A$; Zy ſera la viteſſe de la partie inférieure $ZLPK$, & Zt celle de la partie ſupérieure $ZDCK$.

II.

174. Pour peu qu'on ait fait d'attention à la maniére dont nous avons réſolu les Problêmes précedens, on verra qu'en général quelle que ſoit la cauſe de l'adhérence des parties, toute la difficulté ſe réduit à trouver les endroits où le Fluide ſe ſépare, lorſque toutes ſes tranches ſont animées par des forces accélératrices dv telles, que la quantité $\int dv\,dx$ ſoit $= 0$, & ait une valeur négative plus grande que la force d'adhérence des parties.

Suppoſons donc que l'adhérence mutuelle des particules provienne de leurs inégalités, & que la force néceſſaire pour les ſéparer, ſoit appellée B comme dans l'*article* 50 ; il faudra regarder la viteſſe dv de chaque tranche comme compoſée d'une viteſſe dV qu'elle doit conſerver, & d'une viteſſe $d\mathrm{v}$ qu'elle doit perdre. Donc les tranches animées des viteſſes $d\mathrm{v}$ doivent être en équilibre, & par conſéquent il faut (*article* 52.) que $\int d\mathrm{v}\,dx$ ſoit $= 0$, & n'ait aucune valeur négative $> B$. De plus, il faut que toutes les valeurs de $\int d\mathrm{v}\,dx$ répondantes aux endroits où le Fluide ſe ſépare, ſoient des quantités négatives préciſément égales à B. Car ſi elles étoient moin-

dres, le Fluide ne se sépareroit pas dans ces endroits-là, ce qui est contre l'hypothese ; & si elles étoient plus grandes, les tranches du Fluide animées des vitesses dv ne seroient pas en équilibre (*article* 52.) ce qui est encore contre l'hypothese.

De-là il s'ensuit que la solution du Problême dont il s'agit ici, sera précisément la même que celle du Problême de l'*art.* 159, où nous avons supposé que l'adhérence des particules vînt d'une force active : il n'y a qu'à mettre simplement B à la place de A dans l'*art.* 159. pour avoir la solution que nous cherchons.

III.

175. Si l'adhérence des parties, vient tout à la fois d'une force active & passive, il est clair par tout ce que nous avons dit ci-dessus sur les deux premiéres hypotheses, que les Problêmes ne seront pas plus difficiles, & que pour en avoir la solution, il faut simplement substituer $B + A$ au lieu de A dans l'*art.* 159.



CHAPITRE III.

Remarques sur les Théories que Messieurs Maclaurin *&* Jean Bernoulli *ont données du mouvement des Fluides.*

Abregé de la Théorie de M. Maclaurin.

176. LA Théorie de M. *Maclaurin* exposée dans son Traité des Fluxions, Liv. I. Chap. 12. *article* 137. *& suiv.* n'est, comme il le dit lui-même, qu'une extension de la Théorie de M. *Newton.*

Il suppose d'abord que l'eau sorte d'un Cylindre $ABDC$ (Fig. 62) toujours plein à la même hauteur : il appelle V la vitesse avec laquelle la surface AB se meut, X celle avec laquelle l'eau sort par EF, & suppose que le poids total $AB.AC.g$ de l'eau contenue dans le Cylindre, soit divisée en trois parties, dont l'une qu'il nomme $AB \times AC.f$ produise l'accélération de V, la seconde produise l'excès de X sur V, la troisiéme enfin serve à presser le fond du vase. La somme de ces deux derniéres forces, est par conséquent $AB.AC.(g-f)$ & M. *Maclaurin* suppose que $\frac{AB.AC.(g-f)}{r}$ représente la premiére de ces deux forces, r étant un nombre constant qu'il détermine dans la suite. Cette force engendre dans un petit tems dt la vitesse $X-V$ dans une masse qui sort pen-

dant ce tems dt, & qui eſt proportionnelle à $EF.X.dt$; on a donc par le Principe général des forces accélératrices $AB.AC.(g-f)\ dt = r.EF.X.dt.X - V$, ou (à cauſe que $X:V :: AB:EF$) $r.EF.(AB-EF).XX = AB^2.AC.(g-f)$. Donc ſi on fait $2r.EF.KC \times (AB-EF) = AB^2.AC$, & $2g.KC = AA$; on aura $AA.(g-f) = gXX$, & $AA:AA-XX :: g:f :: gdt.fdt :: gdt:dV :: AB \times gdt : dX \times EF$: donc

$dt = \frac{AA.EF.dX}{g.AB(AA-XX)}$ Equation intégrable par Logarithmes, que M. *Maclaurin* conſtruit par le moyen de l'hyperbole, & qui fait connoître la viteſſe de l'eau qui ſort à chaque inſtant.

177. Lorſque le vaſe n'eſt pas entretenu toujours plein à la même hauteur, on a toujours $g:f :: AA:AA-XX$. De plus, comme V & X, & leurs différences ſont toujours dans la raiſon conſtante de EF à AB. on a toujours $VdV:XdX :: EF^2:AB^2$; donc $gVdV:fXdX :: EF^2 \times AA : AB^2 \times (AA-XX)$; mais en nommant la variable AC, H, on a $VdV = -fdH$, & ſuppoſant $XX = 2g.D$, on a $XdX = gdD$. donc $-dH:dD :: EF^2 \times AA : AB^2 \times (AA-XX)$. donc mettant pour AA, AC, XX, leurs valeurs, & ſuppoſant $e.EF = 2r \times (AB-EF)$, on aura l'Equation

$$HdH.AB^2 = (eDdH - HdD) \times EF^2.$$

dont l'intégrale (en prenant Ca pour la premiére valeur de H, c'eſt-à-dire pour la hauteur du Fluide lorſqu'il

commence à ſe mouvoir) eſt $(1-e)\,H^{-e}D(EF^2) = (Ca^{-e+1} - H^{-e+1}).AB^2$.

178. Il n'y a d'inconnue dans cette Equation que la quantité e. Or e dépend (*article* 177.) de la quantité r qu'il faut préſentement trouver. Cette quantité r, comme nous l'avons vu (*art.* 176.) eſt le rapport de la force $AB.AC.(g-f)$ à la force qui accélére le Fluide ſortant par EF, & qui produit dans ce Fluide la viteſſe $X-V$. M. *Maclaurin* ſuppoſe que ce rapport eſt conſtant : il ajoute que les Auteurs varient au ſujet de la valeur de r. Les uns ſuppoſent, dit-il, que la force qui accélére l'eau qui ſort eſt à celle qui preſſe le fond du vaſe, comme $AB-EF$ eſt à EF; c'eſt-à-dire que ſuivant ces Auteurs $AB.AC.(g-f) : AB.AC.(g-f).(r-1) :: EF : AB-EF$; d'où l'on tire $r = \frac{AB}{EF}$, & par conſéquent $e = \frac{2AB.(AB-EF)}{EF^2}$.

D'autres Auteurs ſuppoſent avec M. *Newton*, que l'eau qui ſort forme en tombant une eſpece de cataracte $AMEFNB$, dont la premiere ſurface AB a une viteſſe égale à celle qu'elle acquereroit en tombant librement d'une certaine hauteur IH, & dont une tranche quelconque MN a une viteſſe égale à celle qu'elle acquereroit en tombant librement de la hauteur IM. D'où ces Auteurs concluent que la cataracte eſt une Courbe hyperbolique, dans laquelle $MN \times \sqrt{IM}$ eſt toujours une quantité conſtante. Or ſuppoſant que les deux forces

dont l'une accélére l'eau qui sort, l'autre agit sur le fond du vase, soient entr'elles comme le solide de la cataracte au reste du Cylindre, on trouve que $AB . AC . (g-f) : AB . AC . (g-f) . (r-1) :: 2EF : AB - EF$. Donc $2EF . r = AB + EF$, & $e = \frac{AB^2 - EF_2}{EF^2}$; c'est à cette valeur que M. *Maclaurin* s'arrête.

179. M. *Maclaurin* suppose ensuite que deux vases *abdc*, *ABDC* (Fig. 63) soient joints l'un avec l'autre; & pour trouver les vitesses en *AB* & *EF*, il nomme *EF*, *O*, *ab*, *C*, *AB*, *B*, *X* la vitesse de l'eau en *EF*, *V*, sa vitesse dans le vase *ABCD*, *Z* sa vitesse dans le vase *abcd*, *F*, *f*, *p*, les forces accélératrices qui engendrent ces vitesses, enfin *AB*, *b*, & *ac*, *c*: par conséquent il trouve suivant ses Principes, $AB . AC . (g-f) = r . O . X \times (X-V) = \frac{XX . (BB-OO)}{2B}$: de même $AL . AB (g-p) = \frac{(CC-BB) . XX . OO}{2C . BB}$; c'est, selon M. *Maclaurin*, l'expression de la force qui engendre à la surface *AB* la vitesse $V-Z$. Il diminue ensuite cette force dans la raison de *AB* à *ab* ou de *B* à *C*, ce qui donne $\frac{(CC-BB) . XX . OO}{2B . CC}$.

De-là il tire l'Equation $[B . b . (g-f) + B . c (g-p)] \times 2BCC = XX [(CC . (BB-OO) + (CC-BB) . OO]$; & faisant $AA . (CC-OO) = 2g . (b+c) . CC$, il trouve $AA . [b . (g-f) + c . (g-p)] = XX . 2g . (b+c)$. Donc $AA : AA - XX :: gb + gc : fb + pc :: gbdt +$

$gcdt : fbdt + pcdt :: gbdt + gcdt : bdV + cdZ ::$ $gbdt + gcdt : \frac{bdX.O.C + C.c.OdX}{B.C}$. donc $dt = AAdX \times$

$\frac{(Cb + Bc).O}{B.C.(gb + gc).(AA - XX)}$.

180. Quand le vaſe n'eſt pas entretenu toujours plein, l'Auteur trouve en ce cas la viteſſe de l'eau par une Méthode ſemblable à celle que nous avons expoſée dans l'*art.* 177.

181. Si les deux vaſes ne communiquoient enſemble que par une petite ouverture ef que M. *Maclaurin* appelle o, il faudroit mettre $XX . \frac{(CC - oo).OO.B}{2CC.oo}$, au lieu de $\frac{XX.(CC - BB).OO}{2B.CC}$ dans le ſecond membre de l'Equation précedente $B.b(g-f)$ &c. parce que $O.X \times (V-Z) \times \frac{ab + AB}{2AB}$ devient alors $\frac{O\ X.(V-Z)}{2.ef.}.(ab+ef) = \frac{(CC-oo).XX.OO}{2Coo}$, & qu'il faut diminuer cette quantité dans la raiſon de CD à ab, ou de B à C.

Quand le vaſe eſt compoſé de pluſieurs Cylindres qui communiquent entr'eux, alors en ſuivant la Méthode donnée par l'Auteur pour le cas de deux vaſes, on trouvera $B.b(g-f) + B.c(g-f)$ &c. $= XX \times \left(\frac{(BB-OO).OOB}{2BB.OO} + \frac{(CC-BB).OOB}{2CC.BB} + \frac{(DD-CC).OOB}{2DD.CC} + \text{\&c.}\right)$ $= XX.\frac{(SS-OO).B}{2SS}$, en nommant S la ſection ſupérieure

du vase, ou la largeur de la premiére surface du Fluide. Soit $(SS-OO).AA = 2g.(b+c+\&c.).SS = 2gH.SS$; on aura $AA:AA-XX::g(b+c+\&c.):fb+pc+\&c$; ou $AA:AA-XX::H\times g:F(\frac{bO}{B}+\frac{cO}{C}+\&c.)$ donc faisant $K=\frac{bO}{B}+\frac{cO}{C}+\&c.$ on aura $XX.(SS-OO)=2SS.(H.g-K.F)$; ou $g.D.(SS-OO)=[H.g-K.F]SS$. mais $Fdt = dX$; $XdX=gdD$; $=X.O.dt=-SdH$: donc $g.DdH(SS-OO)=SSgHdH+KSgOdD$.

Si on examine l'Equation que nous avons donnée ci-dessus *art.* 105. pour le mouvement d'un Fluide sortant d'un vase qui n'est pas entretenu toujours plein à la même hauteur, on trouvera qu'elle s'accorde parfaitement avec celle de M. *Maclaurin*: pour s'en convaincre, il n'y a qu'à supposer dans cette Equation de l'*art.* 105, *m* égale à *K*. Il n'est plus question que d'examiner si la Théorie de cet illustre Auteur est entiérement satisfaisante, quoiqu'il en résulte des solutions exactes.

Remarques sur cette Théorie.

182. Il me semble qu'il y auroit plusieurs difficultés à faire contre cette Théorie de M. *Maclaurin*. 1°. Il y a quelque inconvénient à supposer (comme l'Auteur le reconnoît lui-même *) que l'eau qui sort par *EF* acquiert *tout à la fois* la vitesse $X-V$, c'est-à-dire qu'elle passe

* Art. 546.

subitement

ſubitement de la viteſſe V à la viteſſe X. 2°. M. *Maclaurin* diviſe le poids total du Fluide en trois parties, dont l'une eſt deſtinée à accélérer le Fluide au-dedans du vaſe, l'autre l'accélére à l'ouverture, la troiſiéme enfin preſſe le fond du vaſe; c'eſt la même choſe que s'il eût partagé le poids total du Fluide en deux parties, dont l'une fut ſoutenue par la réſiſtance du fond, & l'autre produiſit le mouvement du Fluide. Il eſt aiſé de voir par l'*art.* 150. que cette ſuppoſition eſt vraye, & que la ſomme des forces motrices des particules du Fluide, plus la preſſion dont le fond du vaſe eſt chargé, eſt égale au poids total du Fluide; mais cette ſuppoſition n'eſt pas, ce me ſemble, aſſez claire par elle-même pour n'avoir pas beſoin de preuve, ſurtout dans les cas où l'ouverture du vaſe n'eſt pas infiniment petite. 3°. M. *Maclaurin* ſuppoſe ſans le démontrer, que la force qui accélére l'eau à la ſortie du vaſe, eſt toujours en raiſon conſtante avec la force qui preſſe le fond; ce qui n'eſt prouvé, ce me ſemble, ni pour le cas où le vaſe ſe déſemplit, ni même pour celui où il reſte toujours plein, parce que dans ce dernier cas même l'eau ne ſort pas avec une viteſſe uniforme, au moins durant un certain tems. 4°. Parmi les différentes valeurs aſſignées à ce rapport, celle pour laquelle M. *Maclaurin* paroît ſe déterminer, eſt celle qui réſulte de la ſuppoſition que l'eau forme une cataracte en deſcendant. Mais en premier lieu, l'exiſtence de cette cataracte n'a jamais été bien prouvée, & M. *Jean Bernoulli* en fait même voir aſſez bien l'impoſſibilité dans

son Hydraulique. * En second lieu M. *Maclaurin* semble lui-même ne pas admettre la cataracte. Car puisqu'il suppose qu'une partie du poids du Fluide est employée à produire la vitesse V, & l'autre à produire la vitesse X, il suppose apparemment aussi que toutes les parties du Fluide se meuvent au-dedans du vase avec la même vitesse qu'à la surface, autrement il faudroit encore avoir égard aux différentes parties du poids, qui produiroient l'accélération des tranches du Fluide au-dedans du vase. En troisiéme lieu, quand on accorderoit que la force qui presse le fond du vase fût égale à ce qui reste du poids du Fluide, après en avoir ôté le poids du Fluide contenu en la cataracte, on ne seroit pas encore en droit d'en conclure que le poids de la cataracte fut la force qui accélérât le Fluide à l'ouverture EF. 1°. Parce que ce poids est plutôt la force qui accélére l'eau dans toute la cataracte, que celle qui l'accélére simplement à l'ouverture. 2°. Parce que l'eau contenue dans la cataracte étant en mouvement, & l'eau qui sort aussi en mouvement, on ne peut supposer que la cataracte agisse sur celle-ci par toute la force de son poids.

Ces remarques, auxquelles on pourroit encore en ajouter d'autres, suffiront, je crois, aux Geométres, pour douter que la Théorie de M. *Maclaurin* soit revêtue de toute l'évidence & la clarté nécessaire, quoique cette Théorie s'accorde pour les résultats qu'elle donne, avec ceux que nous avons trouvés par la nôtre.

* Voyez l'*Hydraulique* de M. *Jean Bernoulli*, imprimée en 1743. à la fin du Recueil de ses œuvres, art. LX.

Théorie de Monſieur Jean Bernoulli, *ou extrait de ſon Hydraulique.*

183. La premiére partie de l'Hydraulique de M. *Bernoulli*, traite du mouvement d'un Fluide dans un vaſe Cylindrique vertical auquel eſt adapté un Tuyau horizontal. M. *Bernoulli* obſerve d'abord, que quand le Fuide paſſe du vaſe dans le Tuyau, ſa viteſſe augmente à la vérité, mais qu'elle ne peut augmenter bruſquement; qu'ainſi il eſt néceſſaire qu'avant de parvenir à l'orifice GF, (Fig. 64) elle s'accélére au moins dans un petit eſpace HG, en formant une eſpece de goufre ou cataracte $IMFGH$. Pour déterminer la force qui produit l'accélération du Fluide $IMFGH$, M. *Bernoulli* HL, t, LM, y, Ll, dt, AE, h; g, la peſanteur; HA, a, BC, m; v la viteſſe de l'eau dans le vaſe GC, & par conſéquent $\frac{mv}{h}$ ſa viteſſe dans le Tube, & $\frac{mv}{y}$ la viteſſe de LM; en appellant u cette derniére viteſſe, il trouve que $yudu$ eſt l'expreſſion de la force motrice de LM; or ſi cette force étoit cenſée venir d'une puiſſance appliquée à la premiére ſurface AE, la puiſſance appliquée en AE, ſeroit par les regles de l'Hydroſtatique, égale à $yudu \times \frac{AE}{y} = hudu$. Donc ſi on imagine que l'accélération de toutes les tranches LM du goufre, vienne d'une force appliquée en AE, cette force ſera $\int hudu$ ou $(\frac{hh-mm}{2h})vv$.

M. *Bernoulli* ſuppoſe cette force égale au poids gha du Fluide contenu dans le vaſe, & il a par ce moyen $(\frac{bb-mm}{2b})\, vv = gha$. Equation de la viteſſe d'un Fluide qui ſort d'un vaſe Cylindrique entretenu toujours plein, lorſque cette viteſſe eſt parvenue à l'état d'uniformité.

184. Pour déterminer en général la viteſſe, lorſqu'elle n'eſt pas encore parvenue à l'état d'uniformité, M. *Bernoulli* appelle b la longueur du Tube FC, x la longueur de l'eſpace que l'eau a parcourue dans le Tube; il remarque que $\frac{mbvdv}{dx}$ eſt la force qui accélére le Fluide dans le Tube, & que cette force transférée en AE eſt $\frac{bbvdv}{dx}$, & que celle qui accélére le Fluide dans le vaſe eſt $\frac{mavdv}{dx}$. Il ajoute enſuite ces deux forces avec celle qui forme la cataracte, & qu'il a trouvée $= \frac{bb-mm}{2b}\, vv$, & il fait la ſomme de ces trois forces égale au poids gha du Fluide contenu dans le vaſe, ce qui produit une Equation d'où il tire en intégrant, la valeur de v.

M. *Bernoulli* ſe ſert d'une Méthode analogue pour trouver le mouvement d'un Fluide qui coule d'un Tuyau cylindrique vertical dans pluſieurs Tuyaux horizontaux adaptés les uns aux autres; augmentant enſuite le nombre des Tuyaux horizontaux, & diminuant leur longueur à l'infini, il détermine les Loix du mouvement d'un Fluide

qui ſort d'un vaſe cylindrique vertical par un Tuyau horizontal de figure quelconque.

185. M. *Bernoulli* auroit pû déduire de-là les Loix du mouvement d'un Fluide qui ſort d'un vaſe de figure quelconque ſitué verticalement, puiſqu'un tel vaſe peut être regardé comme compoſé d'une infinité de Tuyaux cylindriques d'une hauteur infiniment petite : mais dans le deſſein ſans doute de montrer l'étendue de ſes Principes, il ſe propoſe dans la ſeconde partie de réſoudre immédiatement le Problême en général, c'eſt-à-dire de trouver la viteſſe de l'eau qui ſort d'un vaſe de figure quelconque, & voici à peu près comme il s'y prend. Soit u la viteſſe d'une tranche quelconque, $u + du$ la viteſſe que la tranche inférieure & infiniment proche a dans le même inſtant, $u + du + \mathrm{d}u$ la viteſſe de la première de ces deux tranches, lorſqu'elle aura parcouru le petit eſpace dt pour arriver à la place de la tranche qui la précedoit; la force motrice de cette tranche ſera $yu \times (du + \mathrm{d}u)$ & cette force transférée à la ſurface ſera $hu \times (du + \mathrm{d}u)$; or ſuppoſant que v ſoit la viteſſe de l'eau qui paſſe par l'ouverture dans un inſtant quelconque, $v + dv$ ſa viteſſe dans l'inſtant ſuivant, & dx le petit eſpace que parcourt le Fluide en ſortant du vaſe, on aura $dv : \mathrm{d}u :: v : u :: dx : dt$. & par conſéquent $hu\,(du + \mathrm{d}u) = hudu + \frac{hvdv.dt^2}{dx^2}$ dont l'intégrale eſt $\frac{hh - mm}{2h} \times vv + \frac{hvdv}{dx} \int \frac{mdt}{y}$, en prenant dx conſtant, & mettant pour $\frac{dt}{dx}$ ſa valeur $\frac{m}{y}$.

M. *Bernoulli* ſuppoſe cette quantité égale à gha, qui n'eſt autre choſe que la ſomme des poids de chaque tranche transférés à la ſurface, ce qui lui donne l'Equation générale du mouvement d'un Fluide ſortant d'un vaſe qu'on entretient toujours plein : Equation d'où il tire enſuite la viteſſe du Fluide quand le vaſe n'eſt pas entretenu toujours plein, en faiſant ſeulement a & $\int \frac{mdt}{y}$ variables.

186. M. *Bernoulli* appelle la quantité $\frac{hh - mm}{2h} \times vv$, *force Hydroſtatique*, & la quantité $\frac{hvdv}{dx} \int \frac{mdt}{y}$, *force Hydraulique* du Fluide.

Pour déterminer la preſſion en un endroit quelconque KZ, (Fig. 32) M. *Bernoulli* appelle π cette preſſion, & il fait la ſomme des forces Hydroſtatiques & Hydrauliques depuis KZ juſqu'en PL, transférées en KZ, égale à la preſſion $\pi +$ à la ſomme des peſanteurs depuis KZ juſqu'en PL, transférées en KZ ; par le moyen de cette Equation il détermine la quantité π.

Remarques ſur cette Théorie.

187. On voit par l'expoſé que nous venons de faire, que le Principe général de M. *Bernoulli* conſiſte à ſubſtituer à la ſomme des poids de toutes les Couches une ſeule force qui n'agiſſe qu'à la ſurface du Fluide, de ſubſtituer de même à la ſomme des forces motrices des particules du Fluide une ſeule force qui n'agiſſe qu'à la ſurface, & de faire enſuite ces deux forces égales entr'elles.

On ne peut difconvenir que cette Théorie ne foit ingénieufe, & les réfultats qu'elle donne s'accordent d'ailleurs parfaitement avec ceux qui fe tirent de nos Principes. Il me femble cependant que dans plufieurs points elle auroit befoin de démonftration.

Le premier Problême que réfout M. *Bernoulli*, confifte à trouver la viteffe d'un Fluide qui fe meut dans un vafe auquel eft adapté un Tuyau horizontal, le vafe étant toujours entretenu plein à la même hauteur, & la viteffe étant fuppofée parvenue à l'état d'uniformité. M. *Bernoulli* prétend qu'alors la pefanteur du Fluide contenu dans le vafe eft uniquement employée à accélérer le Fluide dans la cataracte *IMFGH*; d'où il conclut que gha doit être $= \frac{bb - mm}{2b} \times vv$.

188. Sur quoi, je remarquerai d'abord en paffant, que M. *Bernoulli* n'auroit point dû fuppofer fans démonftration, que la viteffe d'un Fluide qui fort d'un vafe qu'on entretient toujours plein à la même hauteur, parvient enfin à l'état d'uniformité: ce que M. *Bernoulli* ne prouve que dans la fuite.

En fecond lieu, il me femble qu'il n'auroit pas dû avancer fans le démontrer, que la force qui pouffe le Fluide dans la cataracte eft égale au poids du Fluide contenu dans le vafe, lorfque la viteffe eft parvenue à être uniforme.

Car 1°. il feroit affez naturel de penfer, que le Fluide, obligé de paffer dans un efpace plus étroit pour former

la cataracte, devroit s'accélérer dans cet espace indépendanmment de sa pesanteur, par cette seule raison que l'espace par lequel il doit passer est plus étroit : qu'ainsi le poids du Fluide ne doit pas être regardée comme la seule force qui accélére le Fluide dans la cataracte, ni par conséquent être égalé à cette force. 2°. Quand on accorderoit que l'accélération du Fluide est causée par sa pesanteur, pourquoi, dira-t'on, supposer cette force précisément égale au poids du Fluide ? Ne pourroit-on pas croire que le vase doit soutenir une partie du poids du Fluide ; qu'ainsi on ne sauroit supposer le poids total égal à la force qui forme la cataracte.

Cette derniére difficulté est même d'autant plus naturelle, que M. *Bernoulli* a été obligé dans l'*art.* XXVII. *& suiv.* de son Hydraulique, d'employer une Méthode assez compliquée pour déterminer la pression du Fluide contre le fond du vase. Aussi la valeur de la pression qu'il trouve par cette Méthode dans l'*art.* XXX, ne me paroît-elle pas exacte : car quand l'ouverture est fort petite, il faudroit suivant la formule de M. *Bernoulli*, que cette force fût égale au double du poids du Fluide, au lieu que je crois avoir prouvé dans l'*art.* 150. que cette force n'est alors égale qu'au poids du Fluide.

189. Une raison assez forte, ce me semble, de douter que la Méthode de M. *Bernoulli* soit assez lumineuse & assez directe, c'est que si le Tuyau cylindrique adapté au vase étoit vertical comme le vase, & que la vitesse du Fluide fut parvenue à l'état d'uniformité, alors il faudroit supposer,

ſuppoſer, comme il le dit lui-même, que la force qui produit la cataracte, fût égale à celle qu'on auroit en transférant à la premiére ſurface la peſanteur du Fluide contenu dans le Tuyau & dans le vaſe. Or comment concevoir que la peſanteur du Fluide contenu dans le Tuyau inférieur à la cataracte, puiſſe concourir avec celle du vaſe, à produire l'accélération du Fluide qui forme la cataracte? car comme on fait ici abſtraction de l'adhérence des parties, le poids du Fluide inférieur ne peut agir ſur celui du Fluide ſupérieur.

Lorſque M. *Bernoulli* donne l'Equation générale des viteſſes d'un Fluide qui ſort d'un vaſe Cylindrique qu'on entretient toujours plein, il ſemble donner cette Equation pour exactement vraye, cependant il eſt aiſé de voir par ce que nous avons dit *art.* 112. que cette Equation n'eſt qu'une Equation approchée, dans laquelle on néglige une partie de la force qui accélére dans la cataracte, qu'on regarde comme nulle par rapport au reſte.

190. A l'égard de la Méthode de M. *Bernoulli* pour trouver la viteſſe d'un Fluide qui coule par un vaſe de figure quelconque, j'avoue qu'elle me paroît auſſi ſuſceptible de quelques difficultés. Car ſi la force motrice de chaque tranche n'eſt pas égale à ſon poids, pourquoi la ſomme des forces motrices transférées à la premiére ſurface *AE* (Fig. 64) eſt-elle égale au poids transféré à cette ſurface? On ne pourroit en rendre raiſon, ce me ſemble, dans les Principes de M. *Bernoulli*, qu'en imaginant le poids de toutes les tranches comme réuni à la

première surface *AE*, & comme produisant de-là, pour ainsi dire, l'accélération des différentes tranches. Mais 1°. ne pourroit-on pas croire que la figure du vase contribueroit en partie à l'accélération des couches du Fluide, comme nous l'avons déja observé ? 2°. Ce Principe d'Hydrostatique, que si la surface d'une liqueur est pressée également en tous ses points, la pression se distribue aux autres couches en raison de leur largeur, doit-il être employé sans démonstration lorsqu'il s'agit d'un Fluide en mouvement, dont les parties inférieures semblent se dérober à l'effort des supérieures ? 3°. En accordant même ce Principe & l'usage qu'on en fait ici, il paroît que la force accélératrice devroit être la même dans toutes les tranches, puisque (*art.* 14.) la pression de la surface doit se distribuer également à tous leurs points. 4°. Pourquoi supposer la force motrice précisément égale au poids? ne seroit-il pas naturel de penser que les parois du vase soutiennent au moins une partie de l'effort ? En effet, dira-t'on peut-être, si toute la pesanteur du Fluide est employée à l'accélération, comment se pourra-t'il faire que le Fluide exerce en même-tems une action sur le vase, action dont l'existence ne peut être contestée, puisque si le vase n'étoit pas immobile, il faudroit une certaine force pour le soutenir. 5°. De plus, si on imagine toute la pesanteur du Fluide réunie à la surface, il est naturel de penser qu'elle doit produire une accélération dans la vitesse de toutes les tranches : il n'est pas nécessaire cependant que la vitesse de toutes les tranches s'accélére,

il suffit que le mouvement de la partie inférieure du Fluide augmente (*art.* 103.) & la figure du vase peut être telle que la partie supérieure soit retardée au lieu d'être accélérée : elle le sera même nécessairement (*art.* 98.) si le Fluide est supposé sans pesanteur. 6°. Dans le cas où l'on fait abstraction de la pesanteur du Fluide, je vois bien qu'on en peut trouver le mouvement par la Méthode de M. *Bernoulli*, en faisant $g = 0$ dans ses formules : mais il me paroît assez difficile d'y appliquer directement ses Principes.

Toutes ces difficultés, je l'avoue, n'attaquent point le fonds des Principes de M. *Bernoulli* : on ne peut douter qu'ils ne soient très-vrais, puisqu'ils l'ont conduit à la véritable solution du Problême qu'il cherchoit : cependant ne pourroit-on pas déduire les Loix du mouvement des Fluides d'une Théorie qui portât plus de lumiére dans l'esprit ? il me semble, que les difficultés que je viens de proposer, n'ont pas lieu dans la Méthode que j'ai suivie.

191. J'ignore pourquoi M. *Bernoulli* dans sa solution générale, appelle la quantité $\frac{hh - mm}{2b} vv$ *force Hydrostatique.* Cette force, selon lui, provient de l'action mutuelle des couches qui se poussent & qui se résistent, elle ne consiste que dans un simple effort, ou pression exercée dans un instant indivisible. Il me paroît difficile de concevoir comment $\frac{hh - mm}{2b} \times vv$ est une force simplement Hydrostatique : il me semble, au contraire, que nous

avons vû assez clairement ci-dessus, que $hu \cdot (du + du)$ représentoit la force accélératrice de chaque tranche transférée à la surface, & que l'intégrale de cette quantité étoit $\frac{hh - mm}{2h} \times vv + \frac{hvdv}{dx} \int \frac{mdt}{y}$, qui par conséquent ne représente point une force en partie Hydrostatique & en partie Hydraulique, mais une force simplement Hydraulique, pour me servir des termes de M. *Bernoulli.*

Si par cette distinction de *puissance Hydrostatique* & *puissance Hydraulique*, M. *Bernoulli* avoit voulu dire, que le poids du Fluide devoit se distribuer en deux forces, dont l'une produisît l'accélération & l'autre fut détruite, en ce cas il se seroit trompé dans la détermination de ces forces ; la vraye somme des forces Hydrostatiques doit être $\int dx \cdot (\frac{pdx}{v} - dv)$, & cette somme doit être égale à zero, ce qui produit l'Equation $gha = \frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hvdv}{dx} \int \frac{mdt}{y}$. L'inconvénient de cette dénomination de *force Hydrostatique* & *force Hydraulique* se fait sentir encore mieux, ce me semble, lorsque l'Auteur se propose de déterminer la pression d'un Fluide qui coule contre les parois d'un vase. Il paroît en effet, que pour déterminer cette pression dans ses Principes, il n'y auroit qu'à la supposer égale à la force qui l'a nommée *force Hydrostatique*, mais on n'auroit par-là qu'une détermination fautive de la pression. Aussi outre cette force Hydrostatique, M. *Bernoulli* imagine encore une force qu'il ap-

pelle immatérielle, & qui agit, dit-il, entre chaque tranche, pour pouffer l'une en avant & l'autre en arriére; fuppofant enfuite la fomme des forces, tant *Hydroftatiques*, qu'*Hydrauliques*, pour une tranche quelconque, égale à la pefanteur du Fluide inférieur transférée à cette furface, plus à cette force immatérielle, il vient à bout de la déterminer par ce moyen. Mais après les difficultés que nous venons de faire contre la Méthode générale, n'a-t'on rien à defirer de plus direct & de plus lumineux fur cette détermination ?

CHAPITRE IV.

Du mouvement des Fluides élaftiques.

Premiere Hypothefe.

192. LEs Fluides dont nous confidérerons le mouvement dans les Problêmes fuivans, feront toujours fuppofés également denfes dans toutes leurs parties, & quand nous imaginerons qu'ils fe dilatent ou fe compriment, nous fuppoferons toujours que toutes leurs parties fe dilatent & fe compriment également.

COROLLAIRE I.

193. Donc fi un Fluide élaftique *DCPL* (Fig. 65) renfermé dans un vafe dont le fond *DC* eft immobile, eft fuppofé fe dilater ou fe condenfer de la quantité *PLlp*

infiniment petite, la viteſſe de chaque tranche KZ ſera en raiſon compoſée de l'inverſe de KZ, & de la directe de l'Aire $CDZK$. Car puiſque toutes les parties ſont ſuppoſées ſe dilater ou ſe condenſer également, & que la partie $DCPL$ eſt changée en $DCpl$, la partie $DCKZ$ ſera changée en $DCkz$, & l'on aura $DCkz$ à $DCKZ$ :: $DCpl$ à $DCPL$. Donc $\frac{Oo}{Bb} = \frac{PL.CDZK}{KZ.CDLP}$; mais $\frac{Oo}{Bb}$ exprime le rapport de la viteſſe de KZ à celle de PL, puiſque dans le tems que PL vient en pl, KZ vient en kz. Donc &c.

COROL. II.

194. Donc ſi on appelle KZ, y, PL, K, AO, x, $O\omega = dx$ (en ſuppoſant $KZ\zeta x = PLlp$) l'Aire $CDLP$, A; AB, q; u la viteſſe de PL, v celle de KZ: on aura 1°. $ydx = Kdq$; 2°. $Oo = \frac{dx.\int ydx}{A}$; 3°. $v = \frac{u.K.\int ydx}{A.y}$; 4°. $KZ - kz = (KZ - x\zeta) \times \frac{Oo}{O\omega} = \frac{dy.\int ydx}{A}$. 5°. Si on prend la différence de v en obſervant de faire la différence de $\int ydx =$ à $KZzk$, c'eſt-à-dire à $\frac{ydx.\int ydx}{A}$, & celle de $y =$ à $\frac{dy.\int ydx}{A}$, on trouvera

$$\int dxdv = d\left(\frac{uK}{A}\right).\int\frac{dx\int ydx}{y} + \frac{uKKdq}{AA} \times \left(\frac{\int ydx}{2yy}\right)^2.$$

Donc ſi on ſuppoſe que $\int\frac{dx\int ydx}{y} = M$ lorſque $x = q$,

il eſt évident, que lorſque x ſera $= q$, on aura

$$\int dx\,dv = d\left(\frac{u.K}{A}\right).M + \frac{u.K.Kdq}{2KK}.$$

SCOLIE.

195. On pourroit encore, par une Méthode analogue à celle de l'*art.* 97, connoître la valeur de $\int dx\,dv$: car on trouveroit, en s'y prenant bien, la même expreſſion que nous venons de donner : je ne crois pas qu'il ſoit néceſſaire d'entrer dans un plus grand détail là-deſſus.

COROL. III.

196. Si le Fluide ſe condenſoit, au lieu qu'on a ſuppoſé qu'il ſe dilatoit, on trouveroit encore pour $\int dx\,dv$ la même valeur que dans l'*art.* 194 : on remarquera ſeulement, qu'alors AB (q) diminue, tandis que u augmente, & qu'ainſi Kdq eſt alors une quantité négative.

Seconde Hypotheſe.

197. Pour déterminer les Loix du mouvement des Fluides élaſtiques, nous ſuppoſerons que toutes les tranches d'une maſſe de Fluide donnée ſont animées par une force accélératrice φ, qui dans un même inſtant eſt la même pour toutes ces tranches, & qui varie d'un inſtant à l'autre.

Pour déterminer cette quantité φ, nous ſuppoſerons que π repréſente la force qu'il faudroit appliquer en PL pour retenir le Fluide qui tend à ſe dilater ſuivant AB,

& δ la denſité du Fluide ; il eſt évident que $\varphi . AB . \delta . PL$ doit être $= \pi$, d'où l'on tire $\varphi = \frac{\pi}{PL . AB . \delta}$.

COROLLAIRE.

198. Nous avons vu ci-deſſus (*art.* 68.) qu'en ſuppoſant PL & δ conſtantes, & AB variable, la quantité π reſtoit toujours la même : d'où l'on voit que φ ſera d'autant plus grande que AB ſera plus petite, ou, ce qui eſt la même choſe, que la force accélératrice φ ſera d'autant plus grande, toutes choſes d'ailleurs égales, que la quantité de Fluide ſera moindre. En effet, puiſqu'un Fluide d'élaſticité & de denſité donnée, ſoutient toujours le même poids quelle que ſoit ſa maſſe, il s'enſuit que la viteſſe avec laquelle ſes parties tendent à ſe mouvoir, doit être d'autant plus grande que ſa maſſe eſt plus petite.

SCOLIE.

199. Au lieu de ſuppoſer la force φ répandue ſur toutes les tranches du Fluide, on pourroit ſuppoſer que la ſeule tranche inférieure PL eſt animée de la force $\varphi \times \delta . AB$; nous nous en tiendrons cependant à la premiére ſuppoſition, par le moyen de laquelle on peut traiter le mouvement des Fluides élaſtiques, ſuivant la même Méthode dont nous nous ſommes ſervis pour trouver le mouvement des Fluide ſans reſſort.

Du mouvement d'un Fluide élaſtique dans un vaſe indéfini.

PROBLÊME I.

200. *On demande avec quelle viteſſe une quantité donnée de Fluide élaſtique ſe répand dans un vaſe indéfini* CDHG, *dont le fond* CD *eſt immobile.*

Imaginons que le Fluide ſoit parvenu à occuper un eſpace $CDPL$, que φ ſoit la force accélératrice dont toutes ſes tranches ſont animées dans cet inſtant, u la viteſſe de PL, & v celle d'une tranche quelconque KZ; il eſt évident que $v + \varphi dt$ feroit la viteſſe de chaque tranche dans l'inſtant ſuivant, ſi elle ſe mouvoit librement. Mais comme par l'action des autres tranches ſa viteſſe eſt $v + dv$, il faut donc que $\int dx\,(\varphi dt - dv) = 0$. c'eſt-à-dire (*art.* 194.) que $dt.\varphi.q = d(\frac{u.K}{A})\,M + \frac{u.Kdq}{2K}$; donc ſi on met pour dt ſa valeur $\frac{dq}{u}$, qu'on multiplie tout par $2Ku$, & qu'on diviſe par A, on aura (en remarquant que $dM = \frac{Adq}{K}$)

$$\frac{2K.\varphi.qdq}{A} = d\,(\frac{uuKK}{AA}.M).$$

COROLLAIRE.

201. Il eſt évident que la Loi de la conſervation des forces vives (dans le ſens au moins que l'on la prend

communément) n'a pas lieu ici. Car pour cela il faudroit que l'on eût l'Equation

$$\int y\,dx\,.\,\varphi\,dx \int y\,dx = A\,.\int y\,dx\,.\,v\,dv$$

au lieu que de l'Equation $\int(\varphi dt - dv)\,dx = 0$, qui est celle dont nous avons déduit la solution du Problême précedent, on tire

$$\int y\,dx\,.\,\varphi\,dx = \int \frac{y\,dx\,.\,A\,.\,v\,dv}{\int y\,dx},$$

ce qui donne un résultat fort différent de celui que donneroit l'Equation tirée du Principe des forces vives.

En effet, supposons pour simplifier le calcul que le vase proposé soit un rectangle : en ce cas, on aura $A = Kq$, $y = K$, $M = \frac{qq}{2}$, & la véritable valeur de uu sera $4\int \varphi\,dq$; au lieu que si on vouloit se servir du Principe des forces vives, on trouveroit $2uu = 3\int \varphi\,dq$.

Du mouvement d'un Fluide élastique qui sort d'un vase donné, ou qui y entre.

PROBLÊME II.

202. *Trouver la vitesse d'un Fluide élastique qui sort d'un vase de grandeur finie* DCPL *par l'ouverture* PL, *l'espace extérieur étant supposé vuide, & le fond* DC, *immobile.*

La solution de ce Problême se déduit aisément de celle du Problême précedent. Comme les quantités $DCPL$ (A), $AB\,(q)$, & $PL\,(K)$, sont ici constantes, on aura

$$\int dx\,(\varphi dt - dv) = 0 = dt\,.\,\varphi\,.\,AB - \frac{K}{A}\,du\,.\,M +$$

$\frac{u.PLlp}{2K}$, & ſuppoſant $Bb = ds$ & $PLlp = Kds$, il vient

$$2A.\varphi.AB.ds = 2K.M.udu + Auuds.$$

COROLLAIRE I.

203. Comme l'on a $-Add\delta = \delta Kds$, & $udt = ds$; il eſt évident que par le moyen de ces Equations, & de l'Equation du Problême, on déterminera la quantité de Fluide qui doit reſter dans le vaſe après un tems donné.

COROL. II.

204. Si K eſt fort petit, on aura $uu = 2.\varphi.AB$, on remarquera que la quantité φ (*art.* 197.) $= \frac{\pi}{\delta.K.AB}$, & que la quantité π doit toujours être donnée en δ.

COROL. III.

205. Nous avons ſuppoſé dans la ſolution précedente que l'eſpace extérieur étoit vuide, mais s'il étoit rempli par un Fluide indéfini dont la denſité fût Δ, dont les parties fuſſent animées d'une force accélératrice $= F$, & dont la preſſion ſur PL fût $\Delta.F.PL.c$, il faudroit ſuppoſer alors $\delta\int dx(\varphi dt - dv) = dt.\Delta.F.c$, en regardant Δ & F comme conſtantes, parce que le Fluide extérieur ne change point ſenſiblement de denſité ni d'élaſticité par l'irruption du Fluide renfermé dans le vaſe; ce qui donneroit

$$\delta\times[2A.ds.\varphi.AB - 2K.Mudu - Auuds] = 2A.ds\times\Delta.F.c.$$

PROBLÊME III.

206. *Trouver le mouvement d'un Fluide élaſtique, condenſé dans un vaſe donné* DCPL (Fig. 66) *par l'impulſion d'un Fluide plus élaſtique qui eſt à l'extérieur.*

Il eſt évident qu'il doit entrer durant un certain tems dans le vaſe *DCPL*, une partie du Fluide qui eſt à l'extérieur, ſans que pour cela le Fluide extérieur, qu'on ſuppoſe indéfini, change ſenſiblement de denſité. Or on peut faire ici deux hypotheſes. Car on peut ſuppoſer, ou que le Fluide qui remplit continuellement l'eſpace *DCPL*, ſoit toujours d'une denſité uniforme dans toutes ſes parties, enſorte que la particule de Fluide qui entre à chaque inſtant dans le vaſe, devienne en y entrant d'une denſité égale à celle du Fluide qui y eſt contenu; ou bien que la particule de Fluide qui entre dans le vaſe conſerve toujours ſenſiblement la même denſité qu'elle avoit avant d'y entrer, enſorte qu'au bout d'un certain tems le Fluide qui, au premier inſtant occupoit l'eſpace *DCPL*, ſoit réduit par exemple en *DCZK*, l'autre partie *ZKLP* étant occupée par le Fluide extérieur qui n'a point changé ſenſiblement de denſité.

Première hypotheſe.

207. Les noms demeurant les mêmes que ci-deſſus, *article* (202 & 205), il eſt évident, qu'on aura ici

$\Delta . F . c . dt = \delta \int dx (\varphi dt + dv)$; c'eſt-à-dire

$2A.ds.\Delta.F.c = \delta[2A.ds.\varphi.AB + 2K.Mudu - Auuds]$.

On remarquera que $K\delta ds$ eſt la quantité de Fluide qui entre à chaque inſtant ; qu'ainſi $Ad\delta = K\delta ds$, & comme $u\,dt = ds$, on aura par la combinaiſon de ces deux Equations, & de l'Equation du Problême, tout ce qu'on cherche ici.

Seconde hypotheſe.

208. Suppoſons que le Fluide extérieur ait déja rempli l'eſpace $FGLP$, & que le Fluide qui, au premier inſtant du mouvement occupoit l'eſpace $DCPL$ ſoit réduit en $CDGF$.

Il eſt clair que la viteſſe des couches du Fluide $PLGF$ ſera en raiſon inverſe de leur largeur, & que celle de chaque tranche KZ du Fluide $CDGF$, ſera en raiſon compoſée de la directe de l'Aire $CDZK$ & de l'inverſe KZ.

Soit u la viteſſe de PL, v la viteſſe des tranches KZ du Fluide $CDGF$; on aura la viteſſe de GF, que j'appelle V, $= \frac{u \,.\, PL}{GF}$. & $v = \frac{V \,.\, GF \,.\, CDZK}{KZ \,.\, CDGF}$.

Soient les différentes parties de la diſtance BS, égales à l'indéterminée r, les différentes parties de AS égales à l'indéterminée x, v la viteſſe indéterminée des tranches du Fluide $FGLP$, $AS = q$, BS, q, on aura $\Delta \int dr\ (F dt - dv) = \delta \int dx\ (\varphi dt + dv)$ ou $\Delta \,.\, dt \,.\, F \times BS - \Delta \int dx\, dv = \delta dt \,.\, \varphi \,.\, AS + \delta \int dx\, dv$. Or ſi on appelle N ce que devient $\int \frac{PL^2 \,.\, dr}{y}$, lorſque $r = AS$, on aura (*art.* 88.)

$$\int dr\,dv = \frac{Ndu}{PL} + PL.u.dq.\left(\frac{PL^2 - FG^2}{2PL^2.FG}\right).$$

A l'égard de la quantité $\int dx\,dv$, on trouve, qu'en appellant $CDFG$, A; M ce que devient $\frac{\int dx \int y dx}{y}$, lorsque $x = AS$, on a, lorsque $x = AS$, $\int dx\,dv = d\left(\frac{V.GF}{A}\right)M + \frac{V.dq}{2}$. Donc si on nomme AB, a, GF, k, & qu'on mette pour q sa valeur $a - q$, pour dt sa valeur $\frac{-dq}{V}$, & pour V sa valeur $\frac{u.K}{k}$, qu'enfin on observe que $dM = \frac{Adq}{k}$, on arrivera à une Equation dans laquelle se trouveront les quantités udu & uu, & dont on pourra séparer les indéterminées.

REMARQUE.

209. Il est nécessaire d'observer, que quand un Fluide élastique sort d'un vase dans un espace extérieur rempli par un autre Fluide, ou qu'il est comprimé dans ce même vase par l'introduction du Fluide extérieur, il ne sort du vase ou n'est comprimé que pendant un certain tems, après lequel il rentre dans le vase, ou en sort, & fait ainsi des especes d'oscillations. Comme tout cela se peut déduire aisément de ma Théorie, je ne crois pas qu'il soit nécessaire de m'étendre là-dessus.

PROBLÊME IV.

210. CDLP (Figure 67) *est un vase fermé de tous*

côtés, & rempli par deux Fluides de différente densité qui se compriment & se dilatent alternativement ; on demande la Loi du mouvement de ces deux Fluides.

Imaginons qu'un des deux Fluides occupe l'espace quelconque $CFGD$, & l'autre par conséquent l'espace $FLFG$. Les noms demeurant les mêmes que dans l'*article* 208. nommons de plus $FGPL$, A, M ce que devient la quantité $\int \frac{dr \int y dr}{y}$, lorsque $r = BS$, Δ la densité variable du Fluide $PFGL$, F la force accélératrice des particules de ce Fluide, on aura

$$\delta \int dx\ (\varphi dt + dv) = \Delta \int dr\ (F dt - d\text{v});$$

ou, à cause que $v = \frac{V.k.\int y dx}{y.A.}$, & $\text{v} = \frac{V.k.\int y dr}{y.\text{A}}$, on aura après les réductions

$$-dq.A.\text{A}.[\Delta.F(a-q) - \delta\varphi q] = A.\text{M}.V \times d(Vk) + \text{A}.M.Vd(Vk).$$

On a de plus $-Ad\delta = \delta k dq$ & $\text{A} d\Delta = \Delta k dq$, & enfin $Vdt = -dq$. Ces Equations combinées ensemble serviront à déterminer tout ce qui appartient au mouvement du Fluide.

SCOLIE.

211. On pourroit aussi résoudre le Problême dont il s'agit ici, en faisant une supposition analogue à celle qui a été faite dans l'*article* 207. savoir que la surface FG qui sépare les deux Fluides soit toujours à la même place, qu'ainsi le Fluide contenu dans l'espace constant $PFGL$

ſoit à chaque inſtant également condenſé ou rarefié partout, auſſi-bien que le Fluide $FCDG$, & qu'il ne paſſe à chaque inſtant du Fluide $PFGL$ dans l'autre Fluide qu'une quantité de matiére telle, qu'en ſe dilatant dans l'eſpace $FfgG$ abandonné par le Fluide $FCDG$, elle devienne d'une denſité égale à ce Fluide.

De-là il s'enſuit que ſi on prend l'eſpace $FG\gamma\varphi$, tel qu'il contienne une quantité de matiére égale à celle qui eſt contenue dans $FGgf$, on aura $\delta \times Ss = \Delta \times S\sigma$; & que ſi V eſt la viteſſe de FG pour parvenir en fg, $\frac{V\delta}{\Delta}$ ſera celle de $\varphi\gamma$ pour parvenir en FG, qu'ainſi la viteſſe $\frac{V\delta}{\Delta}$ ſe changera d'un inſtant à l'autre en V; & ſi on prend Ss conſtante & égale à ds, & qu'on faſſe $\frac{V\delta}{\Delta} = \mathrm{V}$, on aura $\delta[\varphi . dt . AS + d(\frac{V . GF}{A}) . M - \frac{Vds}{2}] = \Delta[\varphi . dt . BS - (V - \mathrm{V}) . S\sigma - d(\frac{\mathrm{V} . GF}{\mathrm{A}}) - \frac{\mathrm{V} . S\sigma}{2} .]$ On aura ſoin de mettre dans le premier membre $FG . Ss$ pour dA, & $fg - FG$ pour la différence de FG, & dans le ſecond membre, on mettra $FG . S\sigma$ pour $d\mathrm{A}$, & $FG - \varphi\gamma$ pour la différence de FG.

Du mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſe dilate ou ſe comprime à la fois vers deux côtés différens.

212. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici, que les Fluides ne ſe comprimoient ou ne ſe dilatoient que par une de leurs

leurs extrêmités, l'autre étant toujours appuyée ſur un obſtacle immobile. Il eſt queſtion préſentement de déterminer les Loix du mouvement d'un Fluide, dont les deux extrêmités appuyent contre des obſtacles mobiles.

PROBLÊME V.

213. *Une maſſe de Fluide élaſtique* CDLP (Fig. 68) *ſe trouvant condenſée & réduite dans l'eſpace* cdlp, *on demande la viteſſe d'une de ſes tranches quelconques* KZ, *la viteſſe des deux tranches ou ſurfaces* CD, PL *étant donnée.*

Il eſt évident que toute la difficulté ſe réduit à trouver l'eſpace $cdzk$, dans lequel a été réduit le Fluide qui occupoit auparavant l'eſpace $CDZK$. Car cet eſpace étant une fois trouvé, il eſt conſtant que la viteſſe de KZ ſera à celle de CD comme Oo à Aa : or $CDZK : cdzk :: KZPL : kzpl$; c'eſt-à-dire $Aa . CD - Oo . KZ : CDZK :: Bb . PL + Oo . KZ : KZPL$. donc $Aa . CD . KZPL - CDZK . Bb . PL = Oo . KZ . KZPL + Oo . KZ \times CDZK$, & $Oo = \frac{Aa . CD . KZPL - Bb . PL . CDZK}{KZ . CDPL}$. Donc ſi on nomme u la viteſſe de PL, V celle de CD, v celle de KZ, on aura $v = \frac{V . CD . KZPL - u . PL . CDZK}{KZ . CDPL}$.

REMARQUE.

214. On peut encore s'y prendre d'une autre maniére pour déterminer la viteſſe de KZ. Car la viteſſe de KZ par rapport à celle de CD, PL étant conſiderée comme

fixe, eſt $\frac{V.CD.KZPL}{KZ.CDPL}$; la viteſſe de KZ par rapport à celle de PL, CD étant conſiderée comme fixe, eſt $\frac{u.PL.CDZK}{KZ.CDPL}$. Prenant la différence de ces deux viteſſes, qui eſt la viteſſe réelle de ZK, on aura l'expreſſion que nous avons trouvée dans l'article précedent.

Si les ſurfaces CD, PL ſe mouvoient dans le même ſens, alors il faudroit prendre la ſomme des deux viteſſes $\frac{V.CD.KZPL}{KZ.CDPL}$, & $\frac{u.PL.CDZK}{KZ.CDPL}$ pour la viteſſe de KZ.

COROLLAIRE I.

215. Donc, ſoit que les ſurfaces CD, PL ſe meuvent en même ſens ou en ſens contraires, on peut regarder la viteſſe v de KZ comme compoſée de la viteſſe qu'elle auroit, ſi PL étoit fixe, & de la viteſſe qu'elle auroit, ſi CD étoit fixe. Soient appellées v & u ces deux viteſſes, on aura $v = \mathrm{v} + \mathrm{u}$, en prenant u poſitive ou négative, ſelon que PL ſe mouvra en même ſens que CD, ou en ſens contraire.

COROL. II.

216. Soit $KZ = y$; la diſtance de l'indéterminée KZ à $PL = r$, ſa diſtance de $CD = x$, & l'eſpace $CDPL = A$: ſoit imaginé le Fluide partagé en une infinité de tranches, dont la maſſe ydx ou ydr ſoit donnée. Il eſt clair que la viteſſe v dans un inſtant quelcon-

que, sera $\frac{Vkfydx}{yA}$. En prenant la différence de cette quantité, il faut supposer pour plus de facilité la constante $ydx = dA = Aa.CD + Bb.PL$, & remarquer que la différence de $\int ydx$ est $ydx \times \frac{Oo}{dx}$, & celle de $y = dy \times \frac{Oo}{dx}$. par ce moyen on trouvera facilement la valeur de $\int dr\, d$v, & par une Méthode semblable, on trouvera aussi celle de $\int dx\, d$u.

Regle générale pour déterminer les Loix du mouvement d'un Fluide élastique qui se meut vers deux côtés à la fois.

217. φ étant la force accélératrice qu'on suppose animer toutes les tranches, & faire effort pour les mouvoir tout à la fois en deux sens contraires, soit supposé dans un instant quelconque la vitesse v de la tranche $KZ =$ v + u; dans l'instant suivant la vitesse v deviendroit v $- \varphi dt$, & la vitesse u, u $-\varphi dt$. Donc on peut regarder $\int \frac{dr(\varphi dt + dv)}{dt}$ comme la pression que souffre CD, & $\int dx \left(\frac{\varphi dt + du}{dt}\right)$ comme la pression que souffre PL, & l'effet de ces pressions doit être anéanti.

Donc 1°. s'il n'y a aucun obstacle appliqué en CD, ni en PL, il n'y a qu'à supposer $\int dr \left(\frac{\varphi dt + dv}{dt}\right) = 0$, & $\int dx \left(\frac{\varphi dt + du}{dt}\right) = 0$.

2°. S'il y a un obſtacle appliqué en CD, il faut décompoſer le mouvement de cet obſtacle en deux, dont l'un ne nuiſe point au mouvement de CD, l'autre produiſe ſur CD une preſſion égale à $\int \frac{dr(\varphi dt + dv)}{dt}$. Il en ſera de même pour PL. On aura donc deux Equations, qui avec les Equations $dt = \frac{Aa}{V}$, $dt = \frac{Bb}{u}$ ſerviront à déterminer tout ce qui concerne le mouvement d'un pareil Fluide.

COROLLAIRE.

218. Par les regles précedentes, on peut déterminer 1°. le mouvement de trois Fluides de différente élaſticité contenus dans un vaſe de figure quelconque, & fermé de toutes parts, dont deux appuyent contre les fonds du vaſe, chacun contre le ſien, & le troiſiéme eſt ſitué entre les deux autres.

2°. Le mouvement d'un Fluide élaſtique qui ſort d'un vaſe étant pouſſé par un Piſton.

3°. Le mouvement d'un Fluide élaſtique contenu dans un vaſe Cylindrique, lequel pouſſe d'un côté un Corps hors de ce vaſe, & de l'autre fait reculer le vaſe, qu'on ſuppoſe n'être point immobile, & avoir une maſſe donnée.

Enfin il me ſemble qu'il ne ſauroit être rien propoſé ſur les Loix du mouvement des Fluides élaſtiques, dont on ne puiſſe venir aiſément à bout par la combinaiſon des Principes que nous avons établis dans ce Chapitre.

De la vitesse du son.

219. Ce seroit ici le lieu de donner des Méthodes pour déterminer la vitesse du son : mais j'avoue que je ne suis point encore parvenu à trouver sur ce sujet rien qui pût me satisfaire. Je ne connois jusqu'à présent que deux Auteurs qui ayent donné des formules pour la vitesse du son, savoir M. *Newton* dans ses Principes, & M. *Euler* dans sa Dissertation sur le feu, qui a partagé le prix de l'Académie en 1738. La formule donnée par M. *Euler* sans démonstration, est fort différente de celle de M. *Newton*, & j'ignore quel chemin l'y a conduit. A l'égard de la formule de M. *Newton*, elle est démontrée dans ses Principes, mais c'est peut-être l'endroit le plus obscur & le plus difficile de cet Ouvrage. M. *Jean Bernoulli* le fils, dans la piéce sur la lumiére qui a remporté le prix de l'Académie en 1736, dit qu'il n'oseroit se flatter d'entendre cet endroit des Principes : aussi nous donne-t'il dans la même piéce une Méthode plus facile & plus aisée à suivre que celle de M. *Newton*, & par le moyen de laquelle il arrive à la même formule qu'a donnée ce grand Geométre.

M. *Bernoulli* suppose qu'une particule d'air D (Fig. 69) étant poussée en d, condense jusqu'à une certaine distance les particules C, B, A qui la suivent, ensorte que C parvient en c, B, en b, &c. jusqu'à un point A où la condensation est la plus grande qu'il est possible ; & qu'en même tems la partie DG égale à AD se dilate de la

même façon, les particules E, F, venant en e, f, jusqu'au point G où la dilatation est la plus grande qu'il est possible. M. *Bernoulli* suppose ensuite que l'on appelle la gravité g, A la hauteur d'une colomne d'air de la même densité que la fibre AG, & qui pourroit être en équilibre avec 28 pouces de Mercure; il suppose aussi que l'élasticité de l'air soit en raison inverse de sa densité; & appellant CD, a, Bb, r, Cc, s, Dd, t, il trouve l'élasticité de l'air condensé en $cd = \frac{gAa}{a+s-t}$, & celle de l'air condensé en $bc = \frac{gAa}{a+r-s}$. D'où il s'ensuit que la force motrice du point C, est $\frac{gAa(2s-t-r)}{aa}$. De plus, l'Auteur prouve que les excursions de tous les points de la fibre sont Isocrones; d'où il s'ensuit que la force accélératrice de C doit être comme l'espace Cc qu'il parcourt. Donc $\frac{gA.(2s-t-r)}{s}$ doit être une constante, donc en général, si on appelle t le chemin Dd fait par une particule quelconque $CD = dy$, on aura $ccddt = tdy^2$. Equation qui est la même que celle de la corde sonore tendue; de-là M. *Bernoulli*, en appliquant ici les régles que l'on a données pour les vibrations des cordes sonores, trouve le tems d'une vibration de la fibre AG: & comme à chaque vibration il se forme, selon lui, une nouvelle fibre égale à la premiére, il a par ce moyen l'espace parcouru par le son durant un temps donné.

La grande difficulté, ce me semble, est de faire bien

comprendre, comment la premiére fibre AG peut en former une feconde qui lui foit égale. M. *Bernoulli* prétend que quand la premiére fibre AG eft une fois formée, la matiére étant condenfée en A le plus qu'il eft poffible, tend à fe dilater vers L auffi-bien que vers G, & que c'eft ainfi que la feconde fibre fe forme ; mais 1°. je ne vois pas qu'il foit démontré qu'il doive naître delà une feconde fibre égale à la premiére.

2°. Il me paroît que fuivant les Principes de M. *Bernoulli*, la feconde fibre doit commencer à fe former vers L, lorfque la fibre AG recommence à fe dilater vers G, d'où il s'enfuivroit que le nombre des fibres formées feroit égale au nombre des excurfions fucceffives de la fibre AG de A vers G, & de G vers A. Or, cela pofé, je dis que l'on devroit trouver la viteffe du fon une fois plus grande que M. *Bernoulli* ne l'a trouvée. Pour le démontrer, je remarque que $\frac{gAt}{cc}$ étant la force qui fait parcourir l'efpace Cc à la particule C, on trouvera par un calcul fort fimple, que (p exprimant le rapport de la circonférence au diamétre) $\frac{c.p}{2\sqrt{[gA]}}$ eft le tems de l'excurfion de C en Cc, ou, ce qui eft la même chofe, $\frac{AG.p}{2p\sqrt{[gA]}}$ parce que l'Equation $-ccddt = tdy^2$, donne $AG = p.c.$; d'où il s'enfuit que ce tems eft au tems d'une demi ofcillation d'un pendule de longueur donnée D, comme $\frac{AG.p}{2p[\sqrt{gA}]}$ à $\frac{p\sqrt{D}}{2\sqrt{g}}$, c'eft-à-dire que fi on nomme B, l'efpace

parcouru pat le ſon durant un tems quelconque, ce tems ſera à celui d'une oſcillation du Pendule, comme $\frac{B}{AG} \times \frac{AG \cdot p}{2p\surd[gA]}$ à $\frac{2p\surd D}{2\surd g}$, ou comme B à $2p\surd[D \cdot A]$; d'où il s'enſuit que pendant le tems d'une oſcillation du Pendule, le ſon devroit parcourir un eſpace $=$ à $2p\surd[D \cdot A]$, double de celui que M. *Bernoulli* a trouvé. J'avoue que cette difficulté n'auroit pas lieu, ſi chaque fibre ne ſe formoit que quand la fibre AG a fait une oſcillation entiére, c'eſt-à-dire quand la partie C par exemple eſt venue en (c), après avoir été auparavant en c. Or il eſt vrai que la ſeconde fibre n'eſt formée qu'après une oſcillation entiére de la premiére fibre; mais cette ſeconde fibre, ce me ſemble, doit en former une troiſiéme & une quatriéme pendant la ſeconde oſcillation de la fibre AG; deſorte que le nombre des fibres formées ſera toujours égal au nombre des excurſions de la fibre AG, en comptant la fibre AG pour la premiére fibre.

Comme M. *Newton* & M. *Bernoulli* ſont arrivés tous les deux à la même formule, je ne crois pas devoir examiner ici ce que leur Théorie pourroit avoir de commun ou de différent. J'obſerverai ſeulement que M. *Newton* ſuppoſe, comme M. *Bernoulli*, qu'il s'engendre une nouvelle fibre égale à la premiére, lorſque cette premiére a achevé une vibration entiére; mais j'avoue qu'il ne me paroît pas non plus avoir expliqué clairement, comment une premiére fibre en forme une ſeconde égale à la premiére

miére, & comment le nombre des fibres eſt égal au nombre de vibrations totales, que fait ou que feroit la premiére fibre pendant le tems que ces fibres nouvelles ſe forment.

CHAPITRE V.

Du mouvement des Fluides qui coulent dans des Tuyaux fléxibles.

PROBLÊME I.

220. NMDC, PLHG (Fig. 70) *ſont deux Tuyaux infléxibles & égaux, ſéparés l'un de l'autre par un Tuyau* CPLD, *dont les parois ſont fléxibles ſans élaſticité, & qui eſt uni à chacun de ces Tuyaux; on ſuppoſe qu'un Fluide ſans peſanteur coule dans ce Tuyau compoſé, & que ſa viteſſe ſoit parvenue à l'état d'uniformité; on demande quelle figure prendra le Tuyau* CPLD.

Il eſt conſtant par les regles de la ſtatique, que la figure que prendra le vaſe *CPLD*, doit être telle, que le rayon de ſa développée en un point quelconque Z ſoit en raiſon inverſe de la preſſion en ce point Z. Or nommant AO, x, KZ, y, CD, a, u la viteſſe en CD, qu'on ſuppoſe conſtante, v la viteſſe en KZ, dont la différence eſt $-dv$, parce que x croiſſant, v diminue, on aura $\int \frac{-dx\,dv}{dt}$ pour la preſſion en Z, c'eſt-à-dire que la preſſion

en Z sera $\int \frac{ydx \,.\, uady}{y^3 dt} = \frac{ydx \,.\, ua}{dt} \times \left(\frac{KZ^2 - CD^2}{2KZ^2 \,.\, CD^2}\right) =$ (en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx \,.\, y}{ua}$) $\frac{uu}{2yy} \times (yy - aa)$. Soit la constante $u = \sqrt{[2pc]}$, c'est-à-dire égale à la vitesse qu'un Corps pesant acquereroit en tombant d'une hauteur donnée c, & étant animé par la pesanteur p, on aura $pc - \frac{pca^2}{y^2}$ pour la pression en Z, ou, ce qui revient au même, $pc - \frac{pc \,.\, AD^2}{OZ^2}$.

Donc nommant AD, moitié de CD, b; OZ, t; il faut que $pc - \frac{pcb^2}{t^2} = - \frac{dxddt}{(dx^2 + dt^2)^{\frac{3}{2}}}$, en supposant dx constante, ou (pour garder la Loi des homogenes) il faut que $pc\left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right) = - \frac{pAA \,.\, dxddt}{(dx^2 + dt^2)^{\frac{3}{2}}}$, A étant une constante que nous déterminerons.

Soit $bdx = qdt$, on aura $qddt = - dqdt$, & $(ctt - cbb) \times bqdt \,.\, (qq + bb)^{\frac{3}{2}} = AAbbttdq$, dont l'intégrale est $bc \times (tt + bb + Bt) \,.\, \sqrt{[qq + bb]} = tAAbq$; B étant une nouvelle constante. Par le moyen de cette Equation, & de l'Equation $bdx = qdt$, on construira la Courbe, laquelle comme il est aisé de le voir par l'Equation précedente, sera composée de deux parties égales & semblables DV, VL.

Pour déterminer les constantes A & B, on remarquera que $dt = 0$ doit rendre $x =$ à la moitié de la donnée AB, & que de plus la longueur de la Courbe DVL

eſt donnée ; deux conditions qui fixent néceſſairement la valeur des conſtantes A & B.

REMARQUE I.

221. Il eſt évident qu'on peut toujours par la Méthode que nous venons d'expoſer, trouver la figure du Tuyau $CPLD$, quand même on auroit égard à la peſanteur du Fluide, pourvu qu'on ſuppoſe toujours la viteſſe parvenue à l'état d'uniformité. Autrement le Tuyau $CDPL$, ne conſerveroit pas conſtamment la même figure : & pour lors, il faudroit que l'Equation qu'on trouveroit, donnât la figure du vaſe pour chaque inſtant. C'eſt de quoi nous traiterons plus bas.

REMARQUE II.

222. Si le vaſe $CDLP$ eſt ſuppoſé élaſtique, en ce cas, ſoit F la force élaſtique de ſes parois, force qui doit être connue, & dont le rapport à $2pc$ doit être donné. L'effet de cette force pour pouſſer le point Z ſuivant Zr, eſt $\frac{-Fdxddt}{dx^2+dt^2}$, & cet effort doit être égal à la preſſion du Fluide ſuivant ZR. D'où l'on tirera l'Equation

$$pc\left(1-\frac{b^2}{t^2}\right)=\frac{-Fdxddt}{dx^2+dt^2},$$

& par conſéquent

$$cp(tt+bb+Bt)=tF.dx.\log.\frac{dx}{\sqrt{[dx^2+dt^2]}}.$$

Le ſecond membre de cette Equation eſt une quantité

infiniment petite : le premier membre paroît une quantité finie, mais cette quantité doit être regardée comme infiniment petite, parce que F doit néceſſairement être ſuppoſée infiniment grande par rapport à $2\,pc$; ſoit donc $F = \frac{pr.b}{dx}$, & l'on aura

$$\cdot tt + bb + Bt = bt \,.\, \text{log.}\ \frac{dx}{\sqrt{[dx^2 + dt^2]}},$$

Equation d'où l'on tirera celle de la Courbe.

La conſtante B ſe déterminera par cette condition, que $dt = 0$ rend $x = \frac{AB}{2}$. Il n'y a que cette conſtante à déterminer ; car comme les parois DZL ſont ſuppoſés capables d'extenſion, leur longueur n'eſt pas donnée, comme elle l'étoit dans l'*article* 220.

PROBLÈME II.

223. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Problême précedent, avec cette condition de plus, que les parois* DZL, CKP, *ſoient en mouvement ; on demande le rapport des viteſſes des différentes couches du Fluide.*

Soit $NMDLHGPKCN$ (Fig. 71) l'eſpace qu'occupe le Fluide dans un inſtant quelconque, & ſuppoſons que dans l'inſtant ſuivant les parois DZL, CKP viennent en DzL, CkP & le Fluide en $nmDzLhgPkCn$. Il eſt évident 1°. que la viteſſe des tranches depuis NM juſqu'en CD, ſera = à celle de NM.

2°. Soit pris l'eſpace $nmDVzkXCn = NMDZKCN$.

Il est constant que la vitesse de KZ sera à celle de NM :: $Oo : Nn$, c'est-à-dire (à cause que $Oo \times KZ - NnmM = 2DVZ$) :: $NnmM + 2DVZ : Nn \times KZ$.

3°. A l'égard de la vitesse des tranches depuis PL jusqu'en GH, on trouvera par un raisonnement semblable, qu'elle est à celle de NM :: $NnmM + 2DVLZD : PL . Nn$.

COROLLAIRE.

224. 1°. Si on appelle u la vitesse de NM dans un instant quelconque, laquelle soit $u - du$ dans l'instant suivant dt; on aura la pression en un endroit quelconque Y du vase $CDMN = \frac{-du . MY}{dt} = \frac{+udu . MY}{Nn}$ (abstraction faite de la pesanteur.)

2°. Soit $AO = x$, $KZ = y$, v la vitesse de KZ, & soit le Fluide contenu en $CDZLPKC$ partagé en tranches d'une masse égale, que j'appellerai ydx, & que je supposerai pour plus de facilité égales à $NnmM + 2DVLZD$. La pression en Z sera constamment égale à $\int \frac{dxdv}{dt}$, plus à la pression en CD qui est (*n.* 1.) $= \frac{+udu . MD}{Nn}$.

Soit $NM = a$; $Nn = ds$, $VZ = dy$; on aura $v = \frac{u(ads + 2\int dx dy)}{yds}$, dont on prendra la différence, en remarquant que la différence de y est $VZ + dy \times \frac{Oo}{dx}$, & que celle de $\int dx dy$ est $\int dx ddy + dy . Oo$: on aura

ainſi la valeur de $\int \frac{dxdv}{dt}$, & la preſſion en L ſera égale à ce que devient $\int \frac{dxdv}{dt}$ lorſque $x = AB$, plus à la preſſion en CD qui a été trouvée dans le *n.* 1.

3°. Soient v les viteſſes depuis PL juſqu'en GH, on a $v = \frac{u(ads + 2DZLVD)}{ads}$. Donc nommant $DZLVD, dA$, & PQ, r, on aura la preſſion en Q égale à $\int \frac{drdv}{dt}$, plus à la preſſion en L trouvée dans le *n.* 2.

4°. Si le Fluide étoit peſant, il n'y auroit qu'à retrancher la preſſion trouvée dans les 3 n. précedens pour un endroit quelconque Z, de la preſſion que ſouffriroit cet endroit, ſi le Fluide n'étoit pas en mouvement, c'eſt-à-dire de $p\ (NC + AO)$, & l'on aura alors la preſſion en Z; ce qu'il eſt aiſé de démontrer, puiſque $\int dx\,(p - \frac{dv}{dt})$ eſt toujours alors la valeur de la preſſion.

Regle générale pour déterminer le mouvement d'un Fluide qui coule dans un vaſe fléxible, élaſtique ou non.

225. Il faut 1°. que la preſſion en GH trouvée par l'article précedent, ſoit = 0. 2°. Si le vaſe n'eſt point élaſtique, il faut regarder la viteſſe d'un de ſes points Z dans un inſtant quelconque, comme compoſée de la viteſſe qu'il aura dans l'inſtant ſuivant, & d'une autre viteſſe infiniment petite, dont la direction ſoit perpendiculaire

à la courbe en Z, & foit égale à la preffion que nous avons déterminée pour le point Z. On aura par-là les Equations néceffaires pour déterminer ce qu'on cherche. Il eft vrai qu'elles feront extrêmement compliquées & chargées de différentielles : mais la nature du fujet ne permet pas qu'elles foient plus fimples.

3°. Si le vafe eft élaftique, il faut d'abord confidérer ce que l'action de fes parois, abftraction faite de tout le refte, devroit changer à la viteffe du point Z, dans un inftant quelconque ; regarder enfuite cette nouvelle viteffe comme compofée de celle qu'aura le point Z dans l'inftant fuivant, & d'un autre viteffe perpendiculaire à Z qui foit détruite par la preffion en Z.

Remarque I.

226. La folution du Problême précedent auroit un peu plus de facilité, fi on fuppofoit que toutes les parties du vafe DZL arrivaffent en même tems à la verticale DL, comme on le fuppofe ordinairement dans la folution du Problême *de cordis vibrantibus.* Mais il faut que cette fuppofition quadre avec les Equations qui doivent donner la folution du Problême, & que nous avons appris à trouver ci-deffus.

Par exemple, fi les parois du vafe font tels que dans leur plus grande extenfion leur longueur DZL foit peu différente de AB, on trouve qu'en fuppofant la viteffe du Fluide parvenue à l'état d'uniformité & le Fluide fans

pesanteur, la courbe DZL doit prendre la forme que prend une corde sonore qui fait ses vibrations.

Car la pression en Z étant comme $1 - \frac{AD^2}{KZ^2}$, elle sera aussi comme $KZ - AD$, à cause que KZ est très-peu différente de AD (*hyp.*). Donc $KZ - AD$ devra être en raison inverse du rayon osculateur en Z. Ce qui est l'Equation de la courbe de la corde sonore mise en vibration.

REMARQUE II.

227. Si on suppose la vitesse constante dans le Tuyau CD, & que ce Tuyau soit entretenu toujours plein à la même hauteur NM, il est constant (*article* 223.) que la vitesse de GH sera plus grande que celle de NM, tandis que le Tuyau fléxible DZL va de Z vers O; qu'au contraire, la vitesse de GH sera plus petite que celle de NM, quand le Tuyau DZL va de O vers Z; & que la vitesse de GH recevra ainsi alternativement des degrés égaux d'augmentation & de diminution. D'où il s'ensuit, que pendant une oscillation entiére du Tube fléxible, il sortira la même quantité de Fluide qui sortiroit d'un Tuyau non fléxible de la largeur NM, & dans lequel le Fluide couleroit avec une vitesse constante égale à la vitesse moyenne de GH.

REMARQUE III.

228. La plus grande vitesse de GH est la vitesse de GH

GH, lorſque le Tuyau *DZL* eſt au milieu de ſa vibration de *Z* vers *O*; & la plus petite viteſſe, au contraire, eſt lorſque *DZL* eſt au milieu de ſon retour de *O* vers *Z*. Si on nomme l'eſpace *DZLD*, *A*, *x* l'eſpace que parcourroit la ſurface *NM* avec ſa viteſſe conſtante, pendant le tems d'une vibration du Tuyau; on trouvera, que tandis que *DZL* va de *Z* vers *O*, la quantité de Fluide qui ſort, eſt à la quantité de Fluide qui ſortiroit par un Tuyau infléxible & Cylindrique de la largeur *NM*, comme $nx + 2A$ à nx. Au contraire, quand le Tuyau *DZL* va de *O* vers *Z*, ces deux quantités ſont entr'elles comme $nx - 2A$ à nx.



LIVRE TROISIÉME.

De la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps.

CHAPITRE I.

Principes généraux de la réſiſtance des Fluides.

LEMME.

229. S*I une Courbe* BAC (Fig. 72) *compoſée de deux parties égales & ſemblables, & ſemblablement ſituées autour de ſon Axe* AD, *eſt couverte d'un grand nombre de très-petits cercles* S, *qui ſe touchent ; je dis que le nombre de ces Cercles ſera égal à la circonférence* BAC *diviſée par le diamétre* Gg *ou* Mm *d'une de ces boules.* Ce qui eſt évident.

COROLLAIRE I.

230. Donc ſi on nomme p le rapport de la circonférence au diamétre, α la circonférence BAC, la ſomme des ſurfaces de tous ces Cercles, ſera $\frac{p \cdot Mm^2 \cdot \alpha}{4\, Mm}$.

COROL. II.

231. Si *BAC* étoit la coupe d'un ſolide de révolution qui fut tout couvert de petites boules, en ce cas, nommant α la ſurface courbe formée par *BAC*, on auroit le nombre des boules égal à $\frac{\alpha}{Mm^2}$, & leur ſolidité égale à $\frac{p.Mm^3.\alpha}{6Mm^2}$.

COROL. III.

232. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*article* 229. ſi on décrit une figure *bac* (Figure 73) égale & ſemblable à *BAC*, qui en ſoit infiniment proche & ſituée ſur le même Axe, & qu'après avoir tiré par tous les points *M* de *BAC* des lignes perpendiculaires à $M\mu$ *BAC*, on imagine que tout l'eſpace *BbAcC* renfermé entre les deux courbes ſoit couvert de Cercles, dont les centres ſoient rangés dans les lignes $M\mu$, je dis que le nombre de ces Cercles ſera égal à l'eſpace $\frac{BbAcC}{Mm^2}$, & que par conſéquent leur maſſe ſera égale à $\frac{p.Dd.BC}{4}$.

Si *BAC* étoit un ſolide de révolution couvert de boules, le nombre des boules ſeroit égal à $\frac{p.BC^2.Dd}{4Mm^2}$, & leur ſolidité égale à $\frac{p.Mm^3.p.BC^2.Dd}{6.4Mm^3} = \frac{pp.Dd.BC^2}{24}$.

PROBLÊME I.

233. *Les mêmes choses étant supposées que dans l'article* 229. *avec cette condition de plus, qu'on imprime à la figure* BAC (Fig. 72) *une certaine vitesse; trouver la vitesse qu'elle communiquera à toutes les boules qu'elle touche, & la vitesse qu'elle conservera après le choc.*

Soit u la masse de la figure BAC, u la vitesse qu'elle a reçu par l'impulsion, v la vitesse qu'elle conservera après le choc, $Mm = ds$, $PM = y$, $mn = dy$; il est constant que la vitesse de la petite masse circulaire qui est en M, sera $\frac{v \times dy}{ds}$, & l'on aura par les *art.* 50. & 143. du Traité de Dynamique

$m\ (u - v) = 2\int(\frac{p.ds^2.vdy^2}{4.ds^2}) = 2\int(\frac{a.p.ds^2}{4ds} \times \frac{vdy^2}{ds}) = 2Mv\int\frac{dy^2}{ads}$, en nommant M la somme des Cercles qui couvrent BAC.

COROLLAIRE I.

234. Si la figure BAC est une portion de Cercle, dont le diamétre soit $2a$, on a $\int\frac{dy^2}{ds} = \int\frac{dy\sqrt{[aa-yy]}}{a} = \frac{aa}{4a} + \frac{DC.\sqrt{[aa-DC^2]}}{2a}$.

Donc si la figure BAC est un demi Cercle entier, on aura $v = \frac{2mu}{M+2m}$. donc $\frac{Mu}{M+2m}$ sera la vitesse perdue par le Corps BAC.

COROL. II.

235. Donc ſi les petits Corps *S* ſont élaſtiques, $u - \frac{2Mu}{M+2m}$ ou $\frac{2mu - Mu}{M+2m}$ ſera la viteſſe de la figure. Ce qui s'accorde avec ce qui a été donné par M. *Bernoulli* ſans démonſtration dans ſon diſcours ſur le mouvement.

COROL. III.

236. Si la figure eſt un ſolide de révolution, on aura $m(u - v) = 2v \int (\frac{p \cdot ds^3}{6} \times \frac{py}{ds} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = 2v \int \frac{p \cdot a \cdot ds^3}{6 \cdot ds^2} \times \frac{pydy^2}{a ds} = \frac{2Mv \cdot p}{a} \times \int \frac{ydy^2}{ds}$.

COROL. IV.

237. Si *BAC* eſt un demi Cercle, on aura
$$\frac{ydy^2}{ds} = \frac{aa}{3}; \alpha = 2paa; \& m(u - v) = \frac{Mv}{3}.$$

COROL. V.

238. Si l'eſpace dans lequel le ſolide de révolution *BAC* (Fig. 73) eſt ſuppoſé ſe mouvoir, eſt rempli de petites boules diſpoſées entr'elles, comme on l'a ſuppoſé dans l'*art.* 232, il eſt évident, que tandis que la figure ſe meut de *BAC* en *bac*, elle choque un certain nombre de couches de ces petites maſſes circulaires. Or ſi on ſuppoſe que chaque couche immédiatement contigue à la figure *BAC*, s'anéantit à meſure que cette figure

lui communique du mouvement ; il eſt conſtant qu'en nommant Dd, dx, le point M rencontrera un nombre de Corps égal à $\frac{dxdy}{ds^2}$; d'où il s'enſuit que $m\ (u - v)$ ſera égal à $2v\int(\frac{p \cdot ds^3}{6} \times \frac{dxdy}{ds^2} \times \frac{py}{ds} \times \frac{dy^2}{ds^2})$. Donc en faiſant $u - v = - du$, on trouvera l'Equation ſuivante: $- m\,du = \frac{ppudx}{6}\int\frac{ydy^3}{ds^2}$: & ſi BAC étoit une figure plane, l'on auroit

$$m\ (u - v) = 2v\int\frac{pds^2}{4} \times \frac{dxdy}{ds^2} \times \frac{dy^2}{ds^2},$$

&

$$- m\,du = \frac{pudx}{2}\int\frac{dy^3}{ds^2}$$

COROLLAIRE VI.

239. Il eſt à remarquer que dans le cas dont nous venons de parler dans l'article précedent, la denſité du Corps BAC eſt à celle de l'eſpace rempli par les petites boules, comme $\frac{p \cdot Dd \cdot BC^2}{4}$ à $\frac{pp \cdot Dd \cdot BC^2}{24}$ (*art.* 232.), c'eſt-à-dire comme 6 eſt à p. Or ſi la denſité de l'eſpace rempli par les petites boules diminue ou augmente, la quantité $m\,du$ qui exprime la perte de mouvement faite à chaque inſtant par le ſolide BAC diminuera ou augmentera en même raiſon, ce qui eſt évident; donc ſi on nomme en général δ le rapport des denſités du Fluide & du Corps, on aura

$$-m\,du = 2\delta u\,dx \int \frac{y\,dy^3}{ds^2} \ldots\ldots (A)$$

& si BAC est une figure plane

$$-m\,du = 2\delta u\,dx \int \frac{dy^3}{ds^2} \ldots\ldots (B).$$

COROL. VII.

240. On peut déduire du Corollaire précedent les Loix de la résistance des Fluides au mouvement des Corps. Car considérant un Fluide comme composé d'une infinité de petites boules, on auroit par les formules du Corollaire précedent la résistance d'un Fluide au mouvement d'un Corps, dont la densité seroit à celle du Fluide, comme 1 à δ, & si les boules étoient élastiques, la vitesse perdue dans un tems donné seroit deux fois plus grande que ne le donne la formule précedente.

Donc si on imagine un Cylindre de Fluide dont la hauteur soit C, dont la base soit la même que celle du Conoide BAC, & qui soit égale en masse à ce Conoide, on aura $p \,.\, DC^2 \times C \times \delta = m$, & par conséquent $-C \times DC^2 \,.\, du = 2u\,dx \int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$ lorsque le Fluide est sans ressort, & $-C \,.\, DC^2 \,.\, du = 4u\,dx \int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$ lorsque le Fluide est élastique. Donc supposant que u soit à la vitesse initiale comme 1 à n, & prenant la Soutangente de la Logarithmique des tables égale à 4342945, on aura

$x = (C \,.\, DC^2 \times \log.\, n) : 8685890 \int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$ lorsque le Fluide est sans ressort, &

$x = (C.DC^2 \times \log. n) : 17371780 \int \frac{y dy^3}{ds^2}$ lorfque le Fluide eft à reffort. Ce qui s'accorde avec les formules données fans démonftration par M. *Bernoulli* dans fon difcours fur le mouvement.

Remarque I.

241. Nous avons fuppofé dans le Problême précédent, que les petits Corpufcules S étoient rangés fur la circonférence BAC qu'ils couvroient entiérement; mais fi on fuppofoit qu'ils fuffent rangés fur cette circonférence, à peu près comme on le voit dans la Figure 74, de façon que la fomme de leurs diamétres fût égale, non plus à BAC, mais à BDC, & que les centres des Corpufcules qui forment les différentes couches fuffent rangés, non dans des lignes perpendiculaires à BAC, comme dans l'*article* 232. mais dans des lignes paralléles à l'Axe, je dis qu'on arriveroit toujours en ce cas aux mêmes formules qui ont été données dans l'*art.* 239. comme il eft aifé de le faire voir. En effet, on auroit pour lors $-mdu = 2u \int (\frac{pdy^3}{6} \times \frac{dx}{dy} \times \frac{py}{dy} \times \frac{dy^2}{ds^2}) = \frac{ppudx}{3} \int \frac{ydy^3}{ds^2}$: or la denfité du Fluide eft alors à celle du Corps :: $p.dy^3 \times \frac{BC^2.dx}{24dy^3}$ eft à $\frac{BC^2.dx}{4}$; c'eft-à-dire comme p eft à 6, d'où l'on tirera la même formule générale, que dans l'*art.* 239. pour la réfiftance d'un Corps dans un Fluide, dont la denfité eft donnée.

Nous

Nous pouvons donc regarder en général les formules *A* & *B* de l'*art.* 239. comme les véritables formules de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps, en ſuppoſant les Fluides compoſés de petits Corps circulaires.

REMARQUE II.

242. On peut même arriver aux formules *A* & *B* de l'*article* 239. ſans ſuppoſer que les particules du Fluide ſoient de petits Corpuſcules circulaires.

Pour le faire voir, imaginons (*article* 232.) que nds^2 ſoit la maſſe d'un des petits Corpuſcules, & $\frac{dxdy}{dsds}$ le nombre de ces Corpuſcules rangés dans la ligne $M\mu$ (Fig. 73); leur nombre total ſera égal à $\frac{BbacC}{dsds}$, & leur ſomme égale à $\frac{BC.dx.nds^2}{dsds}$; l'on trouvera pour lors que

$$-mdu = 2u\int\left(nds^2 \times \frac{dxdy}{dsds} \times \frac{dy^2}{ds^2}\right) = \frac{2nudx.ds}{ds} \times \int\frac{dy^2}{ds^2}.$$

Or dans ce cas-ci, la denſité du Fluide eſt à celle du Corps :: $\frac{BC.dx.nds^2}{dsds} : BC.dx$, c'eſt-à-dire comme nds à ds. De-là on tirera en général pour les deux cas, où BAC eſt une figure plane ou un ſolide de révolution, les mêmes formules *A* & *B* que dans l'*article* 239.

REMARQUE III.

243. Les formules que nous avons données dans l'*ar-*

ticle 239, ont été déduites de la ſuppoſition que chaque couche s'anéantiſſoit à meſure qu'elle faiſoit perdre au Corps ſolide une partie de ſon mouvement, ou, ce qui revient au même, que le mouvement imprimé à cette couche, ne ſe communiquoit point aux couches voiſines. D'où il s'enſuit, que pour pouvoir appliquer nos formules au mouvement des Fluides, il faut ſuppoſer que les petites particules du Fluide ſont éloignées les unes des autres, & que le Fluide n'eſt pas infiniment comprimé. Dans cette derniére hypotheſe, l'action de la couche immédiatement contigue au Corps *BAC* ſur les couches voiſines, ne doit pas apporter un grand changement dans nos formules. Car 1°. ſi le Fluide eſt ſans reſſort, la couche contigue au Corps *BAC* ſe meut avec lui en ne faiſant qu'une ſeule maſſe, & la couche ſuivante eſt frappée par conſéquent de la même maniére par le Corps *BAC*, & reçoit le même mouvement, que ſi on n'avoit plus d'égard à la premiére couche. 2°. Si le Fluide eſt élaſtique, la premiére couche communique à la ſeconde tout le mouvement qu'elle a reçu, & ainſi la premiére couche eſt de nouveau frappée par le Corps *BAC*, comme ſi c'étoit une couche nouvelle.

Il faut remarquer encore que les particules du Fluide pouſſées & miſes en mouvement par le Corps qui les rencontre, ne continuent pas leur chemin en ligne droite, mais qu'elles ſe replient pour venir occuper par derriére l'eſpace que le Corps laiſſe vuide, & forment ainſi autour de lui une eſpece de Tourbillon: or on ne peut

imaginer la formation de ce Tourbillon, furtout lorfque le Fluide eft fort comprimé, qu'en fuppofant que le Corps *BAC* agiffe non-feulement fur la couche qui le touche immédiatement, mais auffi fur les couches qui font fituées plus loin, jufqu'à une certaine diftance plus grande ou plus petite, enforte qu'il pouffe par exemple à la fois tous les Corpufcules contenus dans l'efpace *BbacC*, & que tandis que le Corps *BAC* parvient de *D* en *d*, ces Corpufcules qui trouvent derriére le Corps un efpace vuide, viennent remplir cet efpace, ou au moins agiffent latéralement en vertu de la viteffe qui leur eft imprimée, pour forcer les parties voifines à venir remplir cet efpace. Or que le Corps *BAC* agiffe, ou tout à la fois, ou fucceffivement fur les Corpufcules qui rempliffent l'efpace *BbacC*; il eft aifé de voir que la perte de viteffe qu'il fera en parcourant l'efpace *Dd* fera la même dans l'un & l'autre cas. Donc &c.

REMARQUE IV.

244. Le Tourbillon dont nous venons de parler dans l'article précedent, eft principalement fenfible lorfque c'eft le Fluide qui frappe le Corps & qui lui imprime du mouvement. Or on peut toujours imaginer, que c'eft le Fluide qui frappe le Corps. Car pour cela il fuffit de concevoir que le fyftême total du Corps & des parties du Fluide foit mû dans un fens contraire à celui du Corps, avec une viteffe variable égale à celle qu'a le Corps à chaque inftant, il eft conftant que le Corps reftera en re-

pos dans l'espace absolu, sans que l'action du Fluide sur le Corps soit changée. D'où il s'ensuit qu'en général pour déterminer la résistance d'un Fluide à un Corps solide qui s'y meut, on peut supposer avec M. *Newton*, que le Corps soit en repos, & que les particules du Fluide viennent le frapper avec une vitesse égale à celle que le Corps doit avoir. D'après ce Principe, on démontrera facilement une proposition qu'on trouve dans plusieurs Ouvrages, savoir que l'action du Fluide contre la circonférence BAC est à son action sur la base BC, comme $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ à DC, & que si BAC est un solide de révolution, l'action du Fluide sur la surface courbe BAC est à son action sur la base, comme $\int \frac{2y\,dy^3}{ds^2}$ à CD^2. Cette regle me paroît d'autant plus recevable 1°. qu'elle s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit jusqu'ici sur la résistance des Fluides, & particuliérement avec nos formules de l'*art.* 239. 2°. Que M. *Daniel Bernoulli*, celui de tous les Geométres qui s'est écarté le plus sur cette matiére des idées communes, a donné dans un excellent Mémoire imprimé dans le *To.* 8. *de Petersbourg*, des formules pour évaluer l'action d'un Fluide contre une surface place, desquelles il résulte que l'action d'une masse de Fluide donnée, qui frappe une surface plane avec une vitesse donnée, est en raison du Sinus d'incidence, au moins lorsqu'on peut supposer que le Fluide après avoir frappé cette surface, s'écoule vers un seul côté, non vers

deux côtés à la fois. Or c'eſt ce qu'on doit néceſſairement ſuppoſer, quand un Corps ſolide eſt expoſé au courant d'un Fluide. Car toutes les particules qui viennent frapper par exemple la partie *AC* (Fig. 72) s'écoulent de *A* vers *C*, comme ſur un plan incliné.

Je crois donc que dans la Théorie, & abſtraction faite de la tenacité des Fluides, la regle que nous venons d'établir eſt aſſez exacte. Il ne nous reſte plus qu'à déterminer la valeur abſolue de l'action d'un Fluide contre une ſurface plane. C'eſt ce qu'il eſt difficile de déterminer; car les Auteurs ſont fort partagés là-deſſus: M. *Daniel Bernoulli* dans ſon Mémoire que nous venons de citer, la fait double de M. *Newton* dans ſes Principes, & de M. *Jean Bernoulli* dans l'*art.* XXVI. de ſon Hydraulique. Je vais avant de finir ce Chapitre, expoſer en peu de mots ce que je penſe ſur ce ſujet.

PROBLÊME II.

245. OHNK (Fig. 75) *eſt un Canal, dans lequel un Fluide, ſuppoſé ſans peſanteur, coule avec une viteſſe uniforme, &* BAC *eſt un ſolide fixe & immobile au milieu de ce Canal; on demande l'action du Fluide ſur ce ſolide.*

Comme le Fluide, obligé de couler dans un eſpace plus étroit lorſqu'il rencontre le Corps *BAC*, ſe meut alors plus vîte, il exerce néceſſairement ſur le Corps *BAC* une certaine preſſion: c'eſt cette preſſion qu'il s'agit de déterminer.

Soit $AG = a$, AP ou $GQ = x$, $PM = y$, on aura

$QM = a - y$, & si on appelle u la viteſſe de AG, on aura celle de $QM = \frac{ua}{a-y}$, & la preſſion contre un point quelconque M, ſera $\int \frac{dx}{dt} \times d(\frac{ua}{a-y})$; c. à d. (en ſuppoſant $(a-y) \times dx$ conſtant) $\frac{(a-y)dx}{dt} \int \frac{dy.ua}{(a-y)^2} =$ (en mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx.(a-y)}{ua}$) $\frac{u^2.(AG^2 - QM^2)}{2QM^2}$; & l'effort qui en réſultera contre BAC, ſera (*article* 150.)

$$2\int \frac{(a-y)dx.uady}{dt.(a-y)^2} - \frac{2CK.u^2(AG^2 - CK^2)}{2CK^2} =$$

$$\frac{2uu.a.(AG - CK) - uu(AG^2 - CK^2)}{CK} = \frac{uu.CD^2}{CK}.$$

REMARQUE I.

246. Nous avons ſuppoſé dans la ſolution du Problême précedent, que le ſolide BAC étoit immobile; mais ſi on ſuppoſe qu'il puiſſe ſe mouvoir, & qu'il ſe meuve en effet, voici comment on déterminera l'action du Fluide ſur lui dans un inſtant quelconque. On imaginera, que tandis que le point A parvient en a (Fig. 76), LG parvient en $\lambda\gamma$; & ayant tiré par un point quelconque M la ligne Mm égale & parallele à Aa, il eſt évident que l'on aura $gamq = GAMQ$. Donc ſi on fait $qm\mu k = ga\epsilon\gamma$, on aura $\gamma\epsilon\mu k = GAMQ$. D'où l'on voit, que tandis que AG parvient en $\epsilon\gamma$, MQ parvient en μk, & que la viteſſe d'une tranche quelconque QM eſt égale à

la viteſſe *Aa* du Corps *BAC*, plus à la viteſſe qu'auroit cette même tranche, ſi le Corps *BAC* ſuppoſé immobile étoit frappé par le Fluide avec une viteſſe $= aa$. Donc nommant v la viteſſe du Corps, on aura l'action du Fluide ſur le Corps, en mettant $u - v$ pour u dans les formules de l'article précedent.

Remarque II.

247. Au reſte, l'action que nous venons de déterminer dans ce Problême, n'eſt que l'action du Fluide qui provient de ce qu'il eſt obligé de paſſer dans un eſpace plus étroit : il faut de plus, ajouter à cette action celle qui provient de l'impulſion réelle du Fluide ſur le Corps ; & cette conſidération eſt d'autant plus néceſſaire, qu'il y a des cas où l'effort déterminé dans le préſent Problême eſt nul, comme quand le ſolide eſt formé par une Courbe ovale & rentrante en elle-même, ainſi qu'on le voit Figure 77.

Je crois néanmoins que ſi l'Axe *Ab* de cette courbe eſt très-petit par rapport à l'autre Axe *BC*, on peut regarder l'action totale du Fluide ſur le Corps, comme égale à la preſſion que ſouffre la ſeule partie *BAC*. Car 1°. comme on ne peut pas ſuppoſer alors que les particules du Fluide viennent toutes frapper le Corps *BAC* les unes après les autres, la partie de l'action du Fluide, qui provient de ce qu'il eſt obligé de ſe détourner & de paſſer dans un eſpace plus étroit, eſt celle qui produit alors l'effet le plus conſidérable & le plus ſenſible. 2°. Cette action ne ſau-

roit être détruite par la pression du Fluide contre la partie BbC, parce que les parties du Fluide qui ont frappé la partie BAC, ne peuvent pas aisément se replier sur la partie BbC, si cette partie a peu de hauteur par rapport à sa largeur, & qu'ainsi il doit rester alors derriére la partie BbC un espace assez considérable, dans lequel le Fluide est comme stagnant. Ainsi la pression que souffre la partie BbC ne peut être alors que très-petite.

REMARQUE III.

248. Si le Canal $LGKH$ (Fig. 75) est d'une largeur infinie, alors CD est infiniment petite par rapport à AG & à CK, & l'effort est de la pression infiniment petit.

On pourroit supposer néanmoins, & l'expérience n'y est pas contraire, que quand le Canal est infini en largeur, il n'y a qu'une certaine portion du Fluide, voisine du Corps, qui s'accélére à sa rencontre, & que cette portion est d'autant plus grande que la base BC est plus large; de maniére que quand un Corps BAC est exposé au courant d'un Fluide indéfini, on peut imaginer que l'action du Fluide sur lui, est la même que s'il étoit posé dans un Canal dont la largeur LG fût avec BC dans un certain rapport.

COROLLAIRE.

249. On pourroit essayer de déterminer par ce moyen l'action d'un Fluide sur une surface plane BC. Car supposant l'Axe AD infiniment petit, & $CK = DC$, on auroit

roit $uu.BC$ pour la valeur de l'effort cherché, ou (en ſuppoſant $uu = 2p.b$) $p.b.BC$, c'eſt-à-dire égale au poids d'un Cylindre dont BC ſeroit la baſe, & dont la hauteur ſeroit la hauteur b dûe à la viteſſe u du Fluide. Ce qui s'accorde avec ce que M. *Newton* a trouvé par une voye fort différente.

Si on ſuppoſoit $CK = \frac{1}{2} DC$, on auroit une expreſſion double de celle de M. *Newton*, & conforme à celle qu'a donné M. *Daniel Bernoulli* dans ſon Mémoire déja cité, *To.* 8. *des Mém. de Peterſbourg.*

De l'action qu'un Fluide qui s'échappe d'un vaſe, exerce contre ce vaſe.

250. Nous avons parlé ci-deſſus de la preſſion qu'un Fluide qui ſe meut dans un vaſe, exerce contre ce vaſe : il eſt queſtion ici de l'impulſion que ce vaſe, conſideré comme un Corps dont la maſſe eſt donnée, reçoit du Fluide : ce qui a un rapport immédiat à la matiére que nous traitons ici.

La ſolution de ce Problême ſe déduit aiſément de celle du Problême que nous avons donné *art.* 152, il ſuffit pour cela de ſuppoſer dans ce dernier Problême (*art.* 152.) que le vaſe lui-même eſt le poids que le Fluide tend à mouvoir, & employer les mêmes Principes dont nous nous ſommes ſervis dans l'article cité.

Au reſte, outre l'action par laquelle le Fluide tend à faire deſcendre le vaſe, Meſſieurs *Jean* & *Daniel Bernoulli* en admettent encore une autre, qu'ils prétendent ſe ma-

nifester par l'Expérience, & qu'ils appellent *force repoussante.* Selon eux, un Fluide qui sort d'un vase Cylindrique, par exemple, par une ouverture verticale, agit en même tems contre l'endroit du vase directement opposé à cette ouverture, & tend à mouvoir le vase horizontalement dans un sens contraire à celui dont le Fluide se meut. Mais j'avoue que la Théorie que ces deux savans Geométres ont donné sur ce sujet, ne me paroît pas donner une idée claire de la nature de cette force. Aussi ne s'accordent-ils point du tout sur sa mesure, puisque l'un la fait double de l'autre.

Je conçois, il est vrai, d'après quelques raisons qu'il seroit trop long d'expliquer ici, que quand un Fluide s'échappe d'un vase horizontalement, la partie du vase opposée à l'ouverture, & en général la paroi entiére opposée à celle où l'ouverture est faite, souffre une pression plus grande que l'autre paroi, ce qui peut produire dans le vase une tendance à se mouvoir horizontalement dans un sens opposé au Fluide qui sort. Mais je crois qu'il est très-difficile de calculer exactement cette force, & que c'est un Problême de la nature de quelques autres dont j'ai déja fait mention, & où il n'y a pas assez de données.

SCOLIE GENERAL.

251. Il est aisé de déduire des formules que nous avons données dans l'*article* 239. & de ce que nous avons dit dans les *art.* 241. & 249, que la résistance d'un Fluide au mouvement d'un Corps est en général comme le quar-

ré de la viteſſe, toutes choſes d'ailleurs égales. Nous ſuppoſerons néanmoins pour donner plus de généralité à tout ce que nous dirons dans la ſuite, que la réſiſtance ſoit comme une puiſſance, ou même comme une fonction quelconque de la viteſſe.

Nous ne nous en tiendrons pas non plus aux Loix que nous avons données dans ce Chapitre, de la réſiſtance des Fluides au mouvement des Corps compoſés de deux parties ſemblables & égales, & ſemblablement ſitués autour d'un Axe, & qui ſe meuvent ſuivant la direction de cet Axe. Nous donnerons dans la ſuite les Loix de la réſiſtance des Fluides à des Corps de figure quelconque, qui s'y meuvent d'une maniére quelconque.

De la réſiſtance des Fluides élaſtiques au mouvement des Corps.

252. La Théorie que nous avons donnée ci-deſſus (*art.* 240.) de la réſiſtance d'un Corps qui ſe meut dans un Fluide, dont on ſuppoſe que les parties ſont de petits Corpuſcules élaſtiques iſolés & ſéparés les uns des autres, ne peut pas être d'un grand uſage pour déterminer la réſiſtance des Fluides qu'on appelle élaſtiques. C'eſt de quoi tous les Geométres conviendront facilement. C'eſt pourquoi j'ai crû qu'il étoit à propos de dire quelque choſe de plus précis ſur ce ſujet.

253. Lorſqu'un Corps ſolide ſe meut dans un Fluide élaſtique, il agit non-ſeulement ſur la couche qui lui eſt immédiatement contigue, mais encore ſur pluſieurs au-

tres couches plus éloignées jusqu'à une certaine distance, ensorte que le Fluide se condense à la partie antérieure, & se dilate à la partie postérieure du Corps.

Le Fluide se condense à la partie antérieure suivant des lignes perpendiculaires à la surface antérieure du Corps, & il se dilate de même à la partie postérieure, suivant des lignes perpendiculaires à la surface postérieure du Corps, puisque le Fluide qui est à la partie postérieure du Corps remplit en vertu de sa force élastique, l'espace que le Corps laisse vuide, & que cette force élastique tend à agir suivant des lignes perpendiculaires à la surface du Corps.

254. Supposons que $BbacC$ (Fig. 73) soit l'espace dans lequel le Fluide est condensé à la partie antérieure, il est aisé de voir (*art.* 193.) que les vitesses des différens points qui composent par exemple la fibre $M\mu$, seront en progression Arithmétique, telle que la somme des vitesses de tous les points, est égale à la moitié de la vitesse du point M prise autant de fois qu'il y a de Corpuscules dans la fibre $M\mu$, & qu'ainsi la quantité de mouvement du Fluide contenu en l'espace $BbacC$ sera moindre de la moitié, que si le Fluide n'étoit pas élastique, parce qu'en ce dernier cas tous les points de l'espace $M\mu$ recevroient, ou tous à la fois, ou successivement une vitesse égale. Il en est de même du Fluide qui se dilate dans l'espace $BbcC$.

Il faut donc (en nommant Δ la densité du Fluide, & φ la force élastique) regarder l'action du Fluide sur

la ſurface antérieure BAC, comme égale à $2u\Delta \times \int \frac{dx\,dy}{2} \times \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{\varphi \times BC . dx}{u}$, & l'action ſur la ſurface poſtérieure ſe trouvera de même égale à $\varphi . BC . \frac{dx}{u} - u\Delta . DC$; d'où il s'enſuit que l'action totale qui tend à diminuer le mouvement du Corps, ſera $u\Delta dx \left(\int \frac{dy^3}{ds^2} + DC\right)$ force qu'il faudra faire égale à $- m du$.

SCOLIE.

255. Il faut pourtant remarquer que le Fluide n'a d'action ſur la ſurface poſtérieure du mobile, qu'autant que le Fluide a une aſſez grande force élaſtique, pour pouvoir remplir tout d'un coup l'eſpace que le Corps laiſſe vuide par derriére. Autrement il ne faut avoir égard qu'à la réſiſtance que ſouffre la ſurface antérieure. M. Robins a déja fait cette Obſervation dans ſes nouveaux Principes d'artillerie *: mais la Théorie qu'il établit ſur la réſiſtance des Fluides élaſtiques eſt fort différente de celle que je donne ici, autant que j'en ai pû juger en parcourant ſon Ouvrage fort rapidement.

Au reſte, ſi la ſurface poſtérieure du mobile eſt courbe, il y aura toujours, quelle que ſoit la force élaſtique du Fluide, une partie plus ou moins grande de l'eſpace que le Corps laiſſe vuide par derriére, qui ſera remplie par l'irruption du Fluide : car la viteſſe de chaque point de

* A New Principles of Gunnery. by *Benjamin Robins* F. R. S. London &c.

la surface postérieure de la courbe, est toujours à la vitesse du Fluide, comme le ds de ce point est au dy, & ainsi si on prend toute la partie de la surface postérieure, ou $\frac{udy}{ds}$ n'est pas plus grand que la vitesse avec laquelle le Fluide se mouvroit en vertu de sa force φ, il est constant que le Fluide exercera au moins sur cette partie de la surface, une pression à laquelle il faudra avoir égard, & qui sera aisée à calculer.

COROLLAIRE.

256. Si une figure composée de quatre parties égales & semblables, (à peu près telle que le représente la Figure 77), se meut dans un milieu élastique avec une vitesse qui ne soit pas assez grande, pour que le Fluide ne puisse pas venir remplir l'espace qu'elle laisse vuide, on trouvera

$$-mdu = 2u\Delta dx \int \frac{dy^3}{ds^3}.$$

Ce qui revient au même, comme il est aisé de le faire voir, que la formule A de l'*article* 239. Car dans cette formule A, m exprimoit proprement le volume du Corps BAC, & δ le rapport des densités : ici m exprime la masse réelle du Corps BAC, & Δ la densité du Fluide.

De la résistance des Fluides, en ayant égard à l'adhérence de leurs parties.

257. Il est constant que l'adhérence des parties augmente la résistance des Fluides de deux maniéres, 1°. les particules trouvent plus de résistance à se séparer les unes des autres, desorte que la vitesse de chaque particule doit non-seulement être égale à $\frac{udy}{ds}$; mais à $\frac{udy}{ds}$ augmentée de la vitesse qu'il faudroit donner à ces particules pour surmonter la résistance qu'elles font à être divisées les unes des autres. Car il est aisé de voir que le solide *BAC* (Fig. 73) en poussant les particules, tend à les diviser. Soit donc φ la force de l'adhérence des particules, c'est-à-dire la vitesse qu'il faudroit leur donner pour que leur adhérence fut surmontée, si cette vitesse étoit augmentée tant soit peu; on aura pour l'expression de la résistance que souffre la surface antérieure *BAC*, $\int(\Delta \,.\, ds \,.\, \frac{dxdy}{ds} \times [\frac{2udy}{ds} + 2\varphi] \,.\, \frac{dy}{ds})$. 2°. Les parties qui sont à la surface postérieure du solide, résistent à l'effort que fait ce solide pour les entraîner.

Si l'adhérence des parties n'est pas assez forte pour que le Fluide forme autour du Corps un Tourbillon fort grand, on pourra s'en tenir aux deux remarques précedentes, & la résistance que souffrira la partie postérieure du Corps sera $BC \,.\, \Delta \,.\, dx \,.\, u$, soit que cette sur-

face soit plane ou courbe, parce que le solide *BAC* entraîne toutes les parties du Fluide adhérentes à sa surface postérieure dans une direction paralléle à son Axe *AD*, au lieu qu'il pousse les parties antérieures dans une direction perpendiculaire à sa surface ; on aura donc en général

$$-mdu = 2u\Delta dx . (\int \frac{dy^3}{ds^2} + \int \frac{\varphi dy^3}{ds} + DC).$$

CHAPITRE II.

Du mouvement d'un Corps qui s'enfonce dans un Fluide, ou essai d'une nouvelle Théorie de la Réfraction des Corps solides.

258. JE ne traiterai dans ce Chapitre que des Loix de la réfraction du plan circulaire ou de la Sphere, & j'expliquerai plus bas les Loix de la réfraction des Corps de figure quelconque. Je commencerai par le plan circulaire, parce que les calculs sont un peu plus simples que pour la Sphere, & que d'ailleurs les Loix de la réfraction de l'un bien établies, serviront à entendre plus aisément celles de l'autre. Je supposerai que le Cercle entre du premier Fluide dans le second de telle maniére, que la direction du centre de ce Cercle soit dans son plan, & que ce plan soit perpendiculaire à la surface commune qui sépare les deux Fluides.

SECTION I.

SECTION I.

De la Réfraction du plan circulaire.

PROBLÊME I.

259. *Un Cercle* BNA (Fig. 78) *étant mû ſuivant la direction* CA, *trouver la réſiſtance que font à ſon mouvement dans tel inſtant qu'on voudra, les particules d'un Fluide dans lequel on ſuppoſe qu'un de ſes Arcs quelconque* AM *eſt plongé.*

J'ai démontré ci-deſſus *art.* 244, que le Cercle BNA mû dans un Fluide en repos avec une viteſſe quelconque u ſuivant la direction CA, ſouffre la même réſiſtance que ſi ce Cercle BNA étoit en repos, & que les particules du Fluide vinſſent le choquer avec la viteſſe u ſuivant la direction DM parallèle à CA. Cela poſé, ſoit f l'action qu'exerceroit le Fluide contre une ligne donnée comme CB, s'il venoit la frapper perpendiculairement avec une viteſſe donnée g, & ſuppoſons, pour rendre la choſe plus générale, que la réſiſtance ſoit comme une fonction quelconque de la viteſſe, (nous nous ſervirons de la lettre φ, pour déſigner cette fonction, enſorte que φu, φg, exprimeront des fonctions ſemblables de u & de g). Soient menées les lignes MF, mf, infiniment proches l'une de l'autre, & perpendiculaires à CA, & ſoient nommées les conſtantes CA ou CB, a, l'indéterminée AF, x; l'effort abſolu des particules du Fluide qui choquent l'Arc Mm, ſera $\frac{f\varphi u.(adx - xdx)}{\varphi g.a\sqrt{[2ax - xx]}}$, & l'effort

Ee

qui en résulte suivant MC est $= \frac{f\varphi u.[a-x]^2.dx}{\varphi g.aa\sqrt{[2ax-xx]}}$.

L'effort suivant MC ou CS se décompose en deux autres, l'un suivant CR directement opposée à CA, & cet effort est $= \frac{f\varphi u.[a-x]^3.dx}{\varphi g.a^3\sqrt{[2ax-xx]}}$: l'autre suivant CQ perpendiculaire à CA, & ce second effort est $\frac{f\varphi u.[a-x]^2.dx}{\varphi g.a^3}$. Si l'on intégre maintenant chacune de ces deux derniéres quantités, en ne faisant varier que x qui est en effet la seule changeante (puisque u est commune à toutes les particules du Fluide, qui viennent choquer l'Arc AM dans l'instant proposé, & par conséquent doit être regardée comme constante pendant cet instant) ; on trouvera que l'effort total suivant CR ou AC, résultant de l'impression du Fluide sur l'Arc AM, est $\frac{f\varphi u}{3a^3\varphi g} \times$ $(3aa\sqrt{[2ax-xx]}-[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}) = \frac{f\varphi u}{3CA^3.\varphi g} \times$ $(3MF.CA^2 - MF^3)$, & l'effort total suivant CQ, sera $\frac{f\varphi u}{3a^3\varphi g} \times (3aax - 3ax^2 + x^3)$.

COROLLAIRE I.

260. Donc 1°. l'effort suivant CR résultant de l'impression faite sur le quart de Cercle entier AB, seroit $\frac{2f\varphi u}{3\varphi g}$.

2°. L'effort suivant CR résultant de la résistance faite à l'Arc BM, seroit $\frac{f\varphi u}{3CA^3.\varphi g}(2CA^3 - 3MF.CA^2 + MF^3)$.

3°. Enfin, l'effort ſuivant CR réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc EM, feroit $\frac{f\phi u}{3CA^3 . \phi g} . (3 . [Ee - MF] . CA^2 + MF^3 - Ee^3)$.

C O R O L. II.

261. Il ſuit encore 1°. que l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion faite ſur le quart de Cercle entier AMB, feroit $\frac{f\phi u}{3\phi g}$.

2°. L'effort ſuivant CQ réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc BM, feroit $\frac{f\phi u . [a - x]^3}{\phi g . 3 a^3} = \frac{f\phi u . CF^3}{\phi g . 3 CA^3}$.

3°. Enfin, l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion du Fluide ſur l'Arc EM, feroit $\frac{f\phi u . (CF^3 - Ce^3)}{\phi g . 3 CA^3}$.

R E M A R Q U E I.

262. Pour avoir l'effort ſuivant CR réſultant de l'impreſſion faite ſur l'Arc BAH plus grand que le quart de Cercle, il faudra ajouter enſemble les efforts ſuivant CR, réſultans des impreſſions faites ſur les Arcs BA, AH, & l'on aura pour l'expreſſion de cet effort, $\frac{f\phi u}{3CA^3 . \phi g} \times (2 CA^3 + 3 MF . CA^2 - MF^3)$ qui ne differe de celle qu'on a trouvée pour l'Arc BM, (*art.* 260. *n.* 2.) que par le ſigne de MF, qui en effet eſt ici négative. On trouvera

de même $\frac{f\varphi u}{3CA^3.\varphi g}.(3.[Ee+MF].CA^2-MF^3-Ee^3)$ pour la valeur de l'effort ſuivant CR réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc EMH, & cette expreſſion ne différe auſſi de celle qu'on a trouvée pour l'Arc EM, (*art.* 260. *n.* 3.) que par le ſigne de MF, qui en effet doit être priſe ici négativement.

Au contraire, pour avoir l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion faite ſur l'Arc BAH, il faudra ſouſtraire l'effort ſuivant Cq réſultant de l'impreſſion faite ſur l'Arc AH, de l'effort ſuivant CQ réſultant de l'impreſſion faite ſur le quart de Cercle BA, deſorte que l'effort qui reſtera ſuivant CQ, ſera égal à celui qui proviendroit de l'impreſſion faite ſur l'Arc BM, complément de l'Arc BAH au demi Cercle.

De-là il ſuit 1°. que les formules des Corol. I. & II. ci-deſſus, ſont générales pour toutes ſortes d'Arcs plus petits ou plus grands que le quart de Cercle. 2°. Que ſi l'Arc BAH eſt un demi Cercle entier, l'effort ſuivant CQ ſera nul, & il n'y aura que l'effort ſuivant CR, qui retardera le mouvement. Le centre C continuera donc alors ſon chemin en ligne droite ſuivant CA; 3°. Que le plus grand de tous les efforts ſuivant CQ, eſt celui qui réſulte de la réſiſtance faite au quart de Cercle entier AMB.

REMARQUE II.

263. Si le point E (Fig. 79) eſt de l'autre côté du

point *B* par rapport au point *M*, & qu'on cherche la résistance faite par le Fluide à l'Arc *EM*, alors il est visible que la partie *BE* étant à couvert de l'impression du Fluide, il n'y a que l'Arc *BM* qui souffre de la résistance. Donc les efforts suivant *CR* & *CQ* ne sont point alors $\frac{f\varphi u}{3CA^3 \cdot \varphi g}(3 \cdot [Ee - MF] \cdot CA^2 + MF^3 - Ee^3)$, & $\frac{f\varphi u \cdot (CF^3 + Ce^3)}{\varphi g \cdot 3CA^3}$, comme on pourroit le penser d'abord, mais simplement $\frac{f\varphi u}{\varphi g} \cdot (2CA^3 - 3MF \cdot CA^2 + MF^3)$, & $\frac{f\varphi u \cdot CF^3}{\varphi g \cdot 3CA^3}$ (*art.* 260. *n.* 2. & 261. *n.* 2.)

§. I.

De la Réfraction dans des milieux qui résistent comme le quarré de la vitesse.

PROBLÊME II.

264. *Trouver la courbe décrite par le centre* C (Fig. 80) *d'un Cercle* NMH *qui passe obliquement d'un Fluide moins résistant dans un autre plus résistant, en supposant que le Cercle* NMH *soit sans pesanteur, & que la résistance dans chaque Fluide soit comme le quarré de la vitesse.*

Soit *CA* la direction du centre *C* dans un instant quelconque, ou l'enfoncement *EaM* dans le nouveau Fluide, est encore assez petit, pour que le point *E* se trouve sur le quart de Cercle *AB*; il est clair 1°. que les Arcs *AM*, *AH*, aussi-bien que les Arcs *BE*, *be*, étant égaux

& dans le même Fluide, & semblablement posés de part & d'autre de CA, l'impression du Fluide sur ces Arcs ne peut donner d'impulsion au centre C, que suivant CN directement opposée à CA. 2°. Les Arcs EM, εH, étant de même égaux, & semblablement posés de part & d'autre de CA, mais dans des Fluides différens; il s'ensuit, que puisqu'on suppose le Fluide où est l'Arc EM plus résistant que celui où est l'Arc εH, l'effort suivant Cb qui résulte de l'impression du Fluide sur l'Arc EM, l'emportera sur l'effort suivant CB qui résulte de l'impression du Fluide sur l'Arc εH. Le centre C sera donc poussé suivant Cb, & comme sa tendance est en même tems suivant CA, l'action conjointe de ces deux forces lui fera décrire l'Arc ou la petite ligne Ci. D'où l'on voit que *la direction* CA *du centre* C *doit s'écarter continuellement de la ligne* Ca *perpendiculaire à la surface des deux Fluides, au moins tant que le point* E *est sur le quart de Cercle* AB.

Pour trouver l'Equation de la courbe que le centre C décrit alors, nous nommerons f, la résistance que feroit le Fluide où est l'Arc EM, à la ligne CB (a) mûe dans ce Fluide avec une vitesse donnée g, f la résistance que feroit l'autre Fluide à la ligne a mûe dans ce Fluide avec la même vitesse g, & u la vitesse du centre C suivant CA dans l'instant proposé: l'effort suivant Cb provenant de la résistance du Fluide où est l'Arc EM, sera (*art.* 261. *n.* 3.) $\frac{fuu}{3CA^3gg}.(CF^3 - Ce^3)$, & l'effort suivant CB

provenant de la résistance faite à l'Arc sH, sera de même $\frac{fuu}{3CA^3.gg}.(CF^3 - Ce^3)$. Donc l'effort qui résulte de ces deux-là suivant Cb, sera $\frac{[f-f].uu}{3CA^3gg}.(CF^3 - Ce^3)$; or cet effort multiplié par le quarré du tems $(\frac{Ci^2}{uu})$ doit être égal au produit de la masse m du Cercle par la petite ligne oi. On a donc $\frac{[f-f].uu.(CF^3 - Ce^3).Ci^2}{gg.3CA^3.uu} = m.oi$, ou simplement $\frac{[f-f].(CF^3 - Ce^3).Ci^2}{gg.3CA^3} = m.oi$.

Pour rendre homogenes les deux membres de cette Equation, nous supposerons que la vitesse donnée g soit égale à celle que la masse m auroit acquise en parcourant un espace donné b, étant poussée par une force motrice constante p dont on connoisse le rapport à la résistance f ou f; nous aurons $gg = \frac{2pb}{m}$, & l'Equation précedente deviendra $\frac{[f-f].Ci^2}{2pb.3CA^3}.(CF^3 - Ce^3) = oi \ldots\ldots (A)$.

Soit maintenant P l'origine de la courbe cherchée PC, $PH = x$, $HC = y$, $CV = dx$, $Vu = dy$; on aura, en prenant dx constante, $ui = ddy$ & les triangles semblables CVu, uio donnent $oi = \frac{dx\,ddy}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$. De plus, il est évident que la profondeur Oa de l'enfoncement doit être égale à la quantité PH dont le centre est descendu. Donc $Oa = PH = x$, & par conséquent OM

ou $OE = \sqrt{[2ax - xx]}$, $CR = \frac{adx - xdx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; $RF = \frac{dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; donc $CF = \frac{adx - xdx + dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, & $Ce = \frac{adx - xdx - dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$. Si l'on substitue présentement dans l'Equation (A) ces quantités analytiques à la place des lignes qu'elles représentent, nous aurons

$3pba^3dxddy = [f - f](3.[a-x]^2.dx^2dy\sqrt{[2ax-xx]} + dy^3.[2ax - xx]^{\frac{3}{2}})$ Equation de la courbe PC que décrit le centre C, tant que le point E est sur le quart de Cercle AB.

Pour en séparer les indéterminées, soit $ady = zdx$; & l'on aura

$3pba^4dz = (f - f)[3aa.(a-x)^2 zdx.\sqrt{[2ax - xx]} + z^3dx(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}]$...... ($B$).

Cette Equation peut se rapporter à la forme $mdz = qzdx + hz^n tdx$, dans laquelle m, h, sont des coefficiens constans, q, t, des fonctions quelconques de x, & n un nombre quelconque, & que Messieurs *Bernoulli* *, *Manfredi* **, *Craig* *** &c. ont appris à intégrer. Si donc on prend c pour le nombre dont le Logarithme est l'unité, & qu'on suppose qu'à l'origine de la courbe, $ady = hdx$, & par conséquent $z = h$, on aura l'Equation de la courbe exprimée en cette sorte

* *Act. Erud.* 1697. ** *De constr. Æq. diff.* p. 193. *** *De calc. fluent.* p. 42.

(C)..:

$$(C) \ldots dy = hdxc^{\int (2dx.[f-f].[a-x]^2 \sqrt{[2ax-xx]}):pba^3} : \sqrt{[aa - \frac{bb}{3}\int \frac{2dx.[f-f].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^3} \times c^{\int (dx.[f-f].[a-x]^2 \sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}]}.$$

Soit maintenant décrite la courbe GSQ (Fig. 81) dont les coordonnées $PH = x$, $HS = z$, & dont l'Equation soit celle qui est marquée (B); je dis que si l'on prend l'ordonnée $HC = \frac{PGSH}{a}$, le point C sera à la courbe cherchée.

Nous venons de voir, que tant que le point E est sur le quart de Cercle AB, (Fig. 80) la direction CA du centre C s'éloigne toujours de la perpendiculaire Ca; d'où il s'ensuit qu'à mesure que le Cercle s'enfonce, le point A monte, aussi-bien que les points E, M, & le point B descend. Donc le point E & le point B doivent se rencontrer. Pour trouver quelle doit être la quantité de l'enfoncement, lorsque ces points se rencontrent, je nomme cette quantité n, & je remarque qu'on doit avoir pour lors $dy = \frac{[a-n].dx}{\sqrt{[2an-nn]}}$. donc $z = \frac{aa-an}{\sqrt{[2an-nn]}}$; c'est pourquoi si l'on décrit la courbe OT (Fig. 81) dont les coordonnées $PH = x$, $PT = t$ soient telles que $= t \frac{aa-ax}{\sqrt{[2ax-xx]}}$, le point Q où elle coupera la courbe GSQ, déterminera la quantité cherchée $PL = n$, & le point N de la courbe qui lui répond.

Je dis préſentement, que lorſque *le point* E (Fig. 80) *s'eſt confondu avec le point* B, *le centre* C *doit décrire une autre courbe toute différente par ſon Equation, de celle qu'il a décrit juſqu'alors.* Car il eſt aiſé de voir que la force ſuivant *Cb* (Figure 79) continuant de l'emporter ſur la force ſuivant *CB*, le point *B* doit continuer de deſcendre, tandis que le point *E* continue de monter. La force ſuivant *Cb* ne ſera donc plus alors (*art.* 263.) $\frac{[f-\mathrm{f}]}{3CA^3 \cdot gg} \times (CF^3 + Ce^3) \cdot uu$, mais ſimplement $\frac{[f-\mathrm{f}] \cdot uu \cdot CF^3}{3CA^3 \cdot gg}$, & on aura pour l'Equation de la courbe
$6pba^3dxddy = [f-\mathrm{f}](adx - xdx + dy\sqrt{[2ax-xx]})^3$.
Je n'ai pû juſqu'à préſent en ſéparer les indéterminées, quoiqu'il ſoit facile de la réduire à pluſieurs formes plus ſimples que celle-ci. Il n'y a donc point autre choſe à faire, que de conſtruire cette ſeconde courbe par les ſéries.

COROLLAIRE I.

265. Si l'on fait attention aux calculs précedens, on verra que nous n'avons pas eu beſoin de connoître la viteſſe à chaque point de la courbe, pour déterminer la nature de cette courbe, ce qui peut paroître d'abord aſſez ſingulier; mais on tire de-là une propoſition encore plus ſinguliére, c'eſt que *ſi deux Cercles égaux paſſent d'un Fluide donné dans un autre Fluide donné, & qu'ils entrent tous deux dans le ſecond Fluide avec la même inclinaiſon,*

ils décriront la même courbe dans leur passage, & souffriront la même réfraction, quelques différentes qu'ayent été leurs vitesses en entrant, pourvû que la résistance dans chaque Fluide soit comme le quarré de la vitesse.

Car il est aisé de voir que l'expression de la vitesse *initiale* (j'appelle ainsi la vitesse du centre C à l'origine de la courbe) n'entre point dans l'Equation (C), qui est, comme nous avons vû, l'Equation de la premiére courbe; quand on voudroit même supposer que $gg = \frac{2pb}{m}$ fût le quarré de la vitesse initiale, il est évident que la résistance étant (*hyp.*) comme le quarré de la vitesse, & m la même de part & d'autre, $\frac{[f-f]}{2pb}$ seroit toujours une quantité constante. Donc la premiére courbe sera la même de part & d'autre. A l'égard de la seconde courbe, comme l'expression de la vitesse n'entre point non plus dans son Equation, il est facile de faire voir par des Principes semblables, que la premiére courbe étant la même, la seconde ne peut manquer d'être aussi la même de part & d'autre. Donc &c.

COROL. II.

266. Si l'on suppose maintenant que les deux Cercles soient différens en masse, & même, si l'on veut, en vitesse, pourvû que l'inclinaison en entrant & leur densité soit la même; on aura $gg = \frac{2pb}{m}$ constante, & faisant p

proportionnelle à m, b fera conftante, & $\frac{[f-\mathrm{f}]}{2pb}$ fera comme $\frac{[f-\mathrm{f}]}{m}$. Mais f eft comme a, auffi-bien que f, & la denfité étant la même, m eft comme aa. donc $\frac{[f-\mathrm{f}]}{m}$ eft comme $\frac{1}{a}$. De-là & de l'Equation (C) il s'enfuit que fi dans les deux premiéres courbes décrites par chaque Cercle, on prend des abfciffes proportionnelles aux rayons, les appliquées correfpondantes feront auffi comme les rayons. Donc la premiére courbe PN (Fig. 81) décrite par l'un des Cercles, fera femblable à la premiére courbe décrite par l'autre. Il ne fera pas plus difficile de prouver que les deux autres courbes font auffi femblables. Donc les deux Cercles fouffriront encore la même réfraction, quoiqu'ils ne décrivent pas la même courbe.

Donc *deux Cercles différens quelconques venant avec des viteffes différentes quelconques, d'un Fluide donné dans un autre Fluide donné, & entrant dans le fecond Fluide avec la même inclinaifon, ils fouffriront la même réfraction, pourvû que la réfiftance dans chaque Fluide foit comme le quarré de la viteffe.*

COROL. III.

267. Si l'on fuppofe f = o, on aura, en effaçant f dans les Equations précedentes, l'Equation de la courbe décrite au paffage du vuide dans un Fluide. On remarquera de plus, que quelque valeur qu'on fuppofe à f & à f, toutes les autres quantités reftant les mêmes, la courbe

ne changera point, pourvû que $f - \mathrm{f}$ demeure constante. De-là & des deux Corollaires précedens, on tire ce troisiéme Theorême.

Un Cercle quelconque venant avec une vitesse quelconque, d'un Fluide dont la résistance est f, & entrant sous un angle quelconque dans un nouveau Fluide dont la résistance est f, *il souffrira la même réfraction qu'un autre Cercle quelconque, qui viendroit avec une vitesse quelconque d'un Fluide dont la résistance seroit* F, *& entreroit sous le même angle que le premier Cercle, dans un nouveau Fluide, dont la résistance seroit* F, *pourvû qu'on suppose* $F - \mathrm{F} = f - \mathrm{f}$, *& que dans chacun de ces Fluides la résistance soit comme le quarré de la vitesse.*

REMARQUE.

268. Si on jette les yeux sur la Figure 80 ; on verra que le point *B* descendant toujours vers *a*, les points *E*, *M*, montent vers *D*, en même tems que le point *b*. Or cela posé, il peut arriver trois cas différens.

1°. Si le point *M* (Fig. 82) rencontre le point *b* avant que d'arriver en *D*, c'est-à-dire avant que le Cercle soit enfoncé tout-à-fait, il est visible qu'à l'instant de cette rencontre, l'effort suivant *Cb* deviendra nul, puisque le Cercle présentera au nouveau Fluide une moitié entiére *BAb* partagée en deux également par sa direction *CA*. Le centre *C* ira donc en ligne droite, au moins pour cet instant. Mais dans les instans suivans, le Cercle continuera de présenter une moitié entiére au Fluide, comme il

est aisé de le voir : donc le centre continuera d'aller en ligne droite. Donc dans ce cas-ci *le Cercle cessera de décrire une courbe avant que d'être enfoncé tout-à-fait.* D'où il s'ensuit, que la direction CA dans le nouveau Fluide étant donnée, on pourra déterminer aisément, quelle étoit la quantité de l'enfoncement du Cercle, lorsqu'il a cessé de décrire une courbe. Il ne faudra pour cela que mener BCb perpendiculaire à CA, & du point b la ligne bO perpendiculaire à la verticale DCa ; l'abscisse Oa exprimera la quantité de l'enfoncement qu'on cherche.

2°. Si les points E, M, arrivent en D précisément au même instant que le point b ; alors il est vrai que *le centre* C *décrit une courbe pendant tout le tems que le Cercle s'enfonce*, mais on voit aussi que *le Cercle ne s'enfonce dans le nouveau Fluide, que de la quantité précise de son diamétre, & qu'il décrit après son immersion, une ligne droite paralléle à la surface qui sépare les deux Fluides.*

3°. Enfin, si le point b (Fig. 83) arrive en D, avant les points E, M, l'Arc enfoncé pour lors peut être, ou plus grand que le demi Cercle, comme EaM, ou égal au demi Cercle, comme $e\,a\,m$, ou plus petit comme $\epsilon\, a\, \mu$. Or dans chacun de ces trois cas, on voit aisément que le centre C est poussé suivant Cb, & comme CA est pour lors sa direction, l'action conjointe de ces deux forces lui fera parcourir Cc, ce qui est évident. Le Cercle *commencera donc à rentrer dans le Fluide d'où il étoit venu*, & il ne faut qu'une légere attention, pour voir que dans les instans suivans, *il continuera de remonter.* Le point

A montera donc vers *D*, le point *B* de *a* vers *D* suivant *aAD*, & les points *E*, *M*, ou *e*, *m*, ou *ε*, *μ*, descendront vers *a*. Or si l'Arc enfoncé *eam* ou *εaμ* est égal ou moindre que le demi Cercle, lorsque la direction est *CA*, les points *e*, *m*, ou *ε*, *μ*, rencontreront nécessairement le point *B* en quelque endroit de l'Arc *ma* ou *μa*. Le Cercle présentant alors une moitié entiére au Fluide, on voit qu'*il cessera de décrire une courbe avant son émersion totale*, & sortira par une ligne *QG* qui fera avec la surface du Fluide un angle aigu du côté de *G*. [Nous prouverons ci-après, que dans le cas même ou l'Arc enfoncé *EaM* est plus grand que le demi Cercle, lorsque la direction est *CA*, le centre *C* doit cesser de décrire une courbe avant son émersion totale, & sortir, de même que dans les deux cas précedens, par une ligne inclinée à la surface du Fluide.]

COROL. IV.

269. L'Equation (*A*) (Fig. 80) du Problême II. fait voir que $\frac{Ci^2}{oi}$ qui exprime le rayon de la développée de la courbe, est en raison inverse de $CF^3 - Ce^3$ dans la premiére courbe, & en raison inverse de CF^3 dans la seconde. Mais à l'origine de la premiére courbe $CF = Ce$, & à la fin de la seconde, $CF = 0$. Donc *le rayon de la développée est infini aux deux extrêmités de la courbe.* On

peut faire sur cette développée plusieurs autres remarques purement Geométriques. J'en mettrai ici quelques-unes des principales, dont je supprimerai les démonstrations qui sont faciles à trouver.

1°. Si à l'extrêmité de la premiére courbe $dy = dx$, le rayon de la développée y sera le plus petit qu'il est possible; car CF devient alors égale au rayon, c'est-à-dire la plus grande qu'il est possible, & $Ce = 0$. 2°. En supposant dans les Equations du Problême, $f - \mathrm{f} = p$ (supposition que rien n'empêche de faire) si la ligne OL (Fig. 81) est égale à $\sqrt{(2aa \pm \sqrt{[a^4 - a^3 . \sqrt[3]{(36abb)}]})}$, le rayon de la développée est encore un *minimum* à l'extrêmité N de la premiére courbe, & ce rayon est égal au rayon a du Cercle qui s'enfonce. Cette quantité $\sqrt{(2aa \pm \sqrt{[a^4 - a^3 . \sqrt[3]{(36abb)}]})}$ est imaginaire, si $6b > a$. Dans ce dernier cas, aussi-bien que dans le cas ou $6b = a$; on trouvera que si $OL < \frac{a}{\sqrt{2}}$, le rayon de la développée doit être un *minimum* à un des points de la premiére courbe, & que si $OL > \frac{a}{\sqrt{2}}$, le rayon de la développée doit être un *minimum* à un des points de la seconde Courbe. Au contraire, lorsque $b < \frac{a}{6}$, on trouve, que si OL est moindre que la moitié de .... $\sqrt{(2aa - \sqrt{[a^4 - a^3 . \sqrt[3]{(36abb)}]})}$, le rayon de la développée

développée doit être un *minimum* à un des points de la premiére courbe : si OL est > que la moitié de

$\sqrt{(2aa+\sqrt{[a^4-a^3.\sqrt[3]{(36abb)}]})}$, le rayon de la développée doit être un *minimum* à un des points de la seconde courbe : enfin, si OL est < que la moitié de

$\sqrt{(2aa+\sqrt{[a^4-a^3.\sqrt[3]{(36abb)}]})}$, mais > que la

moitié $\sqrt{(2aa-\sqrt{[a^4-a^3.\sqrt[3]{(36abb)}]})}$, alors, où

OL est $>\frac{a}{\sqrt{2}}$, & en ce cas, le rayon de la développée est un *minimum* à un des points de la premiére courbe, où

$OL<\frac{a}{\sqrt{2}}$, & le rayon de la développée est un *minimum* à un des points de la seconde courbe, ou enfin $OL=\frac{a}{\sqrt{2}}$, & le rayon de la développée est un *minimum* à l'extrêmité de la premiére courbe.

SCOLIE.

270. Pour trouver dans la supposition présente la quantité b, & voir dans quels cas elle est plus petite ou égale, ou plus grande que $\frac{a}{6}$, on observera 1°. que f & f sont les résistances que feroient chacun des Fluides à la ligne a, ou, ce qui revient au même, à un parallélogramme dont a seroit la base, & une ligne quelconque λ la longueur. 2°. Si un tel parallélogramme étoit mû avec la vitesse g dans un milieu dont la densité D fût égale à la

différence de densité des deux milieux, & dont par conséquent la résistance fût $f - \mathrm{f}$, & qu'on appellât μ la masse & δ la densité du parallélogramme; on auroit, comme il est aisé de le conclure de la Propos. 37. *l.* 2. de M. *Newton*, $gg = \frac{2\lambda.[f-\mathrm{f}].\delta}{\mu.D}$; mais $gg = \frac{2.[f-\mathrm{f}].b}{m}$. Donc $b = \frac{\lambda m \delta}{\mu D}$. ou (à cause que $m : \mu :: c : 2\lambda$) $b = \frac{c\delta}{2D}$, c exprimant la circonférence dont le rayon est a.

COROL. V.

271. L'angle de contingence $\frac{oi}{Ci} = \frac{[f-\mathrm{f}].Ci}{2pb.3CA^3} \times (CF^3 - Ce^3)$ (Fig. 80) dans la premiére courbe, & $= \frac{(f-\mathrm{f}).Ci}{2pb.3CA^3} \times CF^3$ dans la seconde. D'où l'on voit qu'en supposant $\frac{[f-\mathrm{f}]}{2pb}$ égale à une quantité finie, & prenant l'Arc Ci constant & infiniment petit du premier ordre, l'angle de contingence sera infiniment petit du premier ordre, si $CF^3 - Ce^3$ ou CF^3 est une quantité finie; infiniment petit du second, si $CF^3 - Ce^3$ ou CF^3 est infiniment petit du premier, &c.

PROBLÊME III.

272. *Les mêmes choses étant posées que dans le Problême précedent, avec cette seule différence, que le passage se fasse*

d'un milieu plus résistant dans un autre moins résistant, trouver la courbe que le centre C *doit décrire.*

En appliquant à ce cas-ci les raisonnemens que nous avons faits dans la solution du Problême II. (*art.* 264.) on verra qu'ici *la courbe doit être concave vers la perpendiculaire*, & il n'y a autre chose à faire, que de mettre dans les calculs de l'*article* 264. $-ddy$ pour ddy, & f$-f$ pour $f-$f. Ce qui ne change rien dans les Equations, sinon que la quantité [$f-$f] qui dans le Problême II. étoit positive, doit ici être regardée comme une quantité négative. D'où il s'ensuit, que les calculs du Problême II. sont également applicables à celui-ci, en supposant que f exprime la résistance du Fluide où entre le Cercle, & f la résistance du Fluide d'où il vient.

La courbe *GSQ* (Fig. 81) doit alors s'approcher de plus en plus de *PO*, & la courbe *PN* est concave vers *PO*.

REMARQUE I.

273. Comme la ligne *CA* (Fig. 84) s'approche ici continuellement de la perpendiculaire *Ca*, & que le point *B* monte continuellement vers *D*, en même tems que le point *E*, on pourroit penser d'abord qu'il y auroit des cas où le point *B* arriveroit en *G* avant, ou du moins en même tems que le point *E*, de façon que la courbe dégénereroit alors en une ligne droite *Ca* perpendiculaire à la surface du Fluide. Mais il est clair d'un autre côté, que si *EM* arrive en *Gg* avant que le point *B* soit en *G*, la direction *CA* ne pourra jamais devenir perpendiculaire

à la ſurface du Fluide. Car le point *g* continuant à monter vers *D*, & le point *b* deſcendant en même tems vers *a*, ils ſe rencontreront en quelque point de l'Arc *bg*, & le centre *C* doit alors ceſſer de décrire une courbe (*art.* 268. *n.* 1.)

Il reſte donc à examiner ſi le point *B* (Figure 84) ne peut pas arriver en *G* avant le point *E*. Or en premier lieu, dans l'Equation (*B*) du Problême II, qui dans ce cas-ci eſt celle de la courbe *GSQ* (Fig. 81), il eſt clair que tant que x ne ſera pas plus grande que a, z ne ſauroit être $= 0$, puiſqu'autrement le ſecond membre de l'Equation deviendroit infini, le premier reſtant fini. Donc la courbe *GSQ* ne peut couper ſon Axe *PO* en aucun point de la ligne *PO*: donc la courbe *OT* la rencontre néceſſairement en quelque point *Q*; mais ce point *Q* détermine dans ce cas-ci, comme dans le cas du Problême II. quelle eſt la profondeur *PL* de l'enfoncement, lorſque les points *B*, *E* (Fig. 84) ſe rencontrent. Donc le point *E* doit rencontrer le point *B*, avant que ce point *B* puiſſe arriver en *G*.

Cette démonſtration pourroit laiſſer encore quelque doute dans l'eſprit. Car il eſt aſſez naturel de penſer, que comme les points *B*, *E*, montent continuellement vers *G*, il ſeroit poſſible que le point *B*, quoique rencontré une ou pluſieurs fois par le point *E*, arrivât néanmoins en *G* encore avant le point *E*. Pour voir clairement ſi cela eſt, ſuppoſons que le point *B* monte en effet vers *G* plus vîte que le point *E*, & que *q* ſoit la quantité dont le Cercle

étoit enfoncé, lorſque les points B, E ſe ſont rencontrés l'un l'autre pour la derniére fois; il eſt clair que le point E ſe trouvant alors par l'*hyp.* ſur le quart de Cercle AB, on aura, en faiſant $x = q + s$;

$(D) \ldots 6pba^3 dsddy = [f - f]([(a-q-s) \cdot ds + dy \times \sqrt{(2aq - qq + 2as - 2qs - ss)}]^3 - [(a-q-s) \cdot ds - dy \times \sqrt{(2aq - qq + 2as - 2qs - ss)}]^3)$ Equation de la courbe que le centre C devroit décrire dans ce cas-là. Donc ſuppoſant $a\,dy = z\,ds$, & $z = h$ lorſque $s = 0$, on aura l'intégrale de cette Equation, dans laquelle il ſera facile de voir qu'on ne peut ſuppoſer $z = 0$, ce qui devroit être néanmoins, ſi le point B arrivoit en G avant le point E. Donc &c.

Donc *ſi un Cercle paſſe d'un Fluide plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant, la courbe qu'il décrit dans ſon paſſage, quoiqu'elle tourne ſa concavité vers la perpendiculaire* Ca, *ne ſauroit jamais devenir une ligne droite perpendiculaire à la ſurface du Fluide, au moins dans la ſuppoſition que chaque Fluide réſiſte en raiſon du quarré de la viteſſe.*

Cette propoſition peut d'ailleurs ſe démontrer ſans calcul de la maniére ſuivante. Suppoſons l'angle aCA infiniment petit : il eſt aiſé de voir (Fig. 80) que CF ne différe de Ce que d'une quantité infiniment petite. D'où il s'enſuit (*art.* 271.) que l'angle de contingence ſera infiniment petit du ſecond ordre ; & en général, on ne peut ſuppoſer l'angle aAC infiniment petit d'un ordre quelconque, qu'on ne trouve l'angle de contingence infiniment petit d'un ordre inférieur. Donc l'angle aCA ne

peut être diminué, lorſqu'il eſt infiniment petit, que d'un angle infiniment plus petit que lui : donc cet angle *aCA* ne ſauroit devenir égal à zero.

Outre que cette démonſtration contient, ce me ſemble, la raiſon Métaphyſique de la propoſition que nous voulons démontrer ; elle a encore l'avantage d'être applicable à toutes ſortes d'hypotheſes ſur la Loi de la réſiſtance : car l'angle de contingence ſera comme $\frac{\varphi u}{u^2} \times (CF^3 - Ce^3)$ ou $\frac{\varphi u}{u^2} . CF^3$. La démonſtration reſtera donc la même ; & il eſt vrai de dire en général, qu'*un Cercle qui paſſe d'un milieu plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant, & qui eſt entré dans ce nouveau milieu ſous une direction ſi peu oblique qu'on voudra, ne ſauroit avoir pour direction après ſon enfoncement, une ligne perpendiculaire à la ſurface commune qui ſépare les deux milieux.*

REMARQUE II.

274. Nous avons inſinué dans l'article 273, que les points *B*, *E* peuvent ſe rencontrer pluſieurs fois l'un l'autre. En voici en peu de mots le détail qui ſe démontrera à peu près de la même maniére que les propoſitions énoncées dans *l'art.* 269. *Si* $6b > a$ *les points* B, E *ne peuvent ſe rencontrer plus d'une fois. Il en eſt de même ſi* $6b = a$; *on remarquera ſeulement que dans ce cas, ſi* OL *eſt égale à* $\frac{a}{\sqrt{2}}$ *la courbe* GQ *touchera & coupera en* Q *la courbe* OT *& les points*

B, E *se rencontreront deux fois de suite dans deux instans consécutifs, pour ne plus se rencontrer ensuite. Enfin, si* 6b $<$ a *& que* OL *soit précisément égale à* $\sqrt{(aa + \sqrt{[a^4 - a^3] \times \sqrt[3]{[36abb]}})}$, *la courbe* GQ *touchera la courbe* OT *en* Q *sans la couper, & ne viendra la couper que plus bas, d'où il s'ensuit que les points* B, E *se rencontreront au moins deux fois. On peut observer que* OL *ne sauroit être moyenne entre la moitié de* $\sqrt{(2aa + \sqrt{[a^4 - a^3 \sqrt[3]{(36abb)}]})}$ *& la moitié de* $\sqrt{(2aa - \sqrt{[a^4 - a^3 \sqrt[3]{(36abb)}]})}$.

A l'égard du rayon de la développée, il est un minimum *à l'extrémité de la premiére courbe, lorsque* OL $= \frac{a}{\sqrt{2}}$. *Si* OL $> \frac{a}{\sqrt{2}}$, *il est un* minimum *à un des points de la seconde courbe, & à un des points de la premiére, si* OL $< \frac{a}{\sqrt{2}}$.

REMARQUE III.

275. Il est facile à présent de prouver la proposition qui nous restoit à démontrer ci-dessus dans l'*art.* 268. *n.* 3. savoir que *si un Cercle passe d'un milieu moins résistant dans un autre plus résistant, & que dans le tems où sa direction est* CA, (Fig. 83) *son Arc enfoncé* EaM *soit plus grand que le demi Cercle, il doit cesser de décrire une courbe avant la fin de l'émersion totale.* Car il suffit pour cela (*art.* 268. & 272.) que le point *E* arrive en *N* avant le point *b*. Or nous venons de prouver dans la Remarque I. (*art.* 273.) que cela doit être ainsi. Donc &c.

De-là & de l'*article* 273. il s'ensuit en général, que la courbe *CG* décrite par le centre *C* lorsque le Cercle rentre dans le premier milieu d'où il étoit venu, ne peut être égale & semblable à la courbe *FC* qu'il a décrite en s'enfonçant. Car si ces deux courbes étoient égales & semblables, le centre *C* ne cesseroit de décrire la courbe *CG* qu'après son émersion totale, puisqu'il a commencé de décrire la courbe *FC* dès le premier instant de son immersion.

Remarque IV.

276. Comme dans les Problêmes précedens, nous n'avons pû construire que par la voye des séries, la seconde des deux courbes que décrit le centre *C*, nous ne pourrions arriver que par un calcul très-long & très-pénible, à la connoissance, même peu exacte, de l'angle que fait la direction du centre à l'extrêmité de la seconde courbe, avec la perpendiculaire à la surface des deux Fluides, & qu'on appelle communément *angle de Réfraction.* Ainsi il paroît d'abord qu'il est impossible de savoir *si les Sinus d'incidence & de réfraction sont en raison constante.* C'est néanmoins une des choses qu'on doit desirer le plus de connoître sur cette matiére. L'unique moyen qu'il semble qu'on ait pour s'en assurer, est d'examiner si dans quelque supposition particuliére, on pourroit trouver le rapport de ces Sinus. Il est bien certain que si dans cette supposition, le rapport des Sinus n'étoit pas constant, on seroit fondé à conclure en général, que les Sinus

nus d'incidence & de réfraction ne feroient point en raison constante. Or *il y a deux cas où l'on peut déterminer le rapport des Sinus, savoir* 1°. *lorsque les deux milieux diffèrent peu l'un de l'autre en résistance.* 2°. *Lorsque la direction du Cercle en entrant est presque perpendiculaire à la surface commune des deux Fluides, quelque différence qu'on suppose d'ailleurs dans les résistances.* Mais dans chacun de ces deux cas, on trouve que *les Sinus sont en raison constante.* C'est ce que nous allons démontrer, & nous verrons ensuite quelles conséquences on en peut déduire pour le rapport des Sinus en général.

Commençons par le cas où la différence $[f - \mathrm{f}]$ des résistances est très-petite. Nous supposerons d'abord que CA (Figure 85) soit la direction du centre C au commencement de l'immersion, d'où il s'ensuit que $aM = h$, & si on tire les perpendiculaires CB à CA & BZ à Ca, & qu'on nomme aZ, q, on trouvera $h = \frac{aa - aq}{\sqrt{[2aq - qq]}}$. Or la différence de résistance des deux milieux étant (*hyp.*) fort petite, la courbe décrite différera très-peu de la droite CA, c'est pourquoi au lieu de prendre comme dans le Problême II. $a\,dy = z\,dx$, nous prendrons $a\,dy = [h + z].dx$: z ne pourra être alors qu'une quantité très-petite, & on aura l'Equation

$$6pba^3dz = (f - \mathrm{f})\,dx\,[6aa.(a - x)^2.h \times \sqrt{(2ax - xx)} + 2h^3(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}] \ldots\ldots\ldots (E).$$

Car comme tous les termes du second membre sont multi-

pliés par $f - \mathfrak{f}$ qui (*hyp.*) eſt une quantité très-petite, il s'enſuit qu'on peut négliger dans ce ſecond membre tous les termes où z ſe rencontreroit, parce que ces termes ſeroient nuls par rapport aux autres. Par-là on aura facilement l'intégrale de l'Equation précedente, & la valeur de z en x.

Suppoſons préſentement, que le centre C ſoit arrivé à l'extrêmité de la premiére courbe, ſi la ligne $C\delta m$ eſt pour lors ſa direction, & qu'on mene les perpendiculaires $C\Delta$ & Δz à $C\delta$ & Ca, la ligne az marquera la quantité de l'enfoncement, ou la valeur de x dans cet inſtant. Or comme (*hyp.*) les deux milieux différent peu l'un de l'autre, l'angle $AC\delta$ eſt fort petit, & les lignes aZ (q) & az doivent être cenſées les mêmes. Donc Mm que j'appelle β eſt égale à ce que devient la valeur de z, lorſque $x = q$. On a donc

$$\beta = \frac{f - \mathfrak{f}}{4pba^5} \left(\frac{3aah - h^3}{3} [(a-q) . [2aq - qq^{\frac{3}{2}}] + [haa + h^3] . P \right)$$

j'appelle P ce que devient $\int aadx \sqrt{[2ax - xx]}$ lorſque $x = q$. Si on cherche maintenant de la même maniére l'Equation de la ſeconde courbe, on trouvera, en faiſant $ady = (h + \beta + z)\,dx$

$$6pba^3dz = (f - \mathfrak{f})\,dx\,[aa - ax + h . \sqrt{[2ax - xx]}]^3 \ldots (F):$$

en intégrant cette Equation & faiſant attention qu'à l'origine de la courbe, on a $x = az = q$, on aura la valeur de z.

Soit à préſent $C\alpha\mu$ la direction du centre C à l'extrêmité

de la ſeconde courbe. Si on mene les perpendiculaires $C\beta$ à $C\alpha$ & βd à Ca, on prouvera comme ci-deſſus, que ad qui eſt alors $= x$ ne différe de $2a - q$ qu'infiniment peu. Donc $m\mu$ que j'appelle δ eſt égale à ce que devient z lorſque $x = 2a - q$. Or ſi on nomme c la circonférence dont le rayon eſt a, il eſt clair que lorſque $x = 2a - q$, on a $\int aadx \sqrt{[2ax - xx]} = \frac{ca^3}{4} - P$. Donc $\delta = \frac{f - \mathfrak{f}}{24pba^3}[(3haa - h^3).[2q - 2a].(2aq - qq)^{\frac{3}{2}} + (3haa + 3h^3)(\frac{ca^3}{4} - 2P)]$. Donc ſi $\beta + \delta$ eſt nommé α, on aura, en ôtant ce qui ſe détruit, & mettant pour h ſa valeur $\frac{aa - aq}{\sqrt{[2aq - qq]}}$; $\frac{(f - \mathfrak{f}).c.a_3.(a - q)}{4p.8b.(2aq - qq)^{\frac{3}{2}}} = \alpha$.

Or pour que le Sinus de réfraction $\frac{b + \alpha}{\sqrt{[aa + (b + \alpha)]^2}}$ ſoit au Sinus d'incidence $\frac{b}{\sqrt{[aa + bb]}}$ en raiſon conſtante, il faut que leur différence $\frac{a^2\alpha}{(aa + bb)^{\frac{3}{2}}}$ ſoit en raiſon conſtante avec $\frac{b}{\sqrt{[aa + bb]}}$; c'eſt-à-dire que α ſoit en raiſon conſtante avec $\frac{a^3.[a - q]}{(2aq - qq)^{\frac{2}{2}}}$, ce qui réſulte en effet de l'Equation précedente, puiſque le rapport de ces deux quantités eſt $\frac{(f - \mathfrak{f}).c}{4p.8b.}$. Donc *lorſque les deux milieux différent très-peu l'un de l'autre en réſiſtance, les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante.*

REMARQUE V.

277. Suppoſons préſentement que la direction du Cercle en entrant ſoit preſque perpendiculaire à la ſurface commune des deux Fluides, dans ce cas h étant fort petite, l'Equation C de l'*article* 264. deviendra ....

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{a} c^{\int (dx.[f - \mathrm{f}].[a-x]^2.\sqrt{[2ax - xx]}):pba^3} + \frac{h^3}{6a^3} \times$$

$$c^{\int (dx.[f - \mathrm{f}].[a-x]^2 \sqrt{[2ax - xx]}):pba^3} \times$$

$$\int \left(\frac{2dx.[f - \mathrm{f}].[2ax - xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^3} \times \right.$$

$$\left. c^{\int (2dx.[f - \mathrm{f}].[a-x]^2.\sqrt{[2ax - xx]}:pba^3} \right) \ldots\ldots\ldots (1).$$

Soit au (Fig. 86) la quantité dont le Cercle eſt enfoncé, lorſqu'il ceſſe de décrire la premiére courbe: ſi on nomme Cu, α, on aura $\frac{Cu}{\beta u} \left(\frac{a}{\sqrt{[aa - \alpha\alpha]}} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha^3}{2a^3} \right) =$ à ce que devient le ſecond membre de l'Equation précedente (1) lorſque $x = au$. Or comme au ne différe de aC que d'une quantité infiniment petite Cu, ſuppoſons que $c^{\int (dx.[f - \mathrm{f}].[a-x]^2 \sqrt{[2ax - xx]}):pba^3}$, ou, ce qui eſt la même choſe, ...

$$c^{[f - \mathrm{f}].([a-x].[2ax - xx]^{\frac{3}{2}} + \int aadx \sqrt{[2ax - xx]}):4pba^3}$$

ſoit égal à $c^{n:a}$ lorſque $x = a$: il eſt aiſé de voir que la valeur de $c^{\int (dx.[f - \mathrm{f}].[a-x]^2 \sqrt{[2ax - xx]}):pba^3}$ lorſque $x = au$, ne différe de $c^{n:a}$ que d'une quantité infi-

niment petite du troisiéme ordre. Donc en mettant $hc^{n:a}$ pour $hc^{\int(dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$ dans l'Equation (1) on ne négligera qu'une quantité infiniment petite du quatriéme ordre, parce que h est infiniment petite. Soit enfin $q=$ à ce que devient la quantité ......

$$\int\frac{2dx.[f-\mathrm{f}].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^3}\times$$
$$c^{\int(2dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorsque $x=au$ ou Ca, & il viendra ....

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha^3}{2aa}=\frac{hc^{n:a}}{a}+\frac{h^3c^{n:a}q}{6a^4}.$$

D'où l'on tire

$\alpha=hc^{n:a}+\frac{h^3c^{n:a}q}{6a^3}-\frac{h^3c^{3n:a}}{2aa}$, quantité qui ne différe de la vraye valeur de Cu, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre tout au plus.

Je dis maintenant que l'angle $aC\alpha$ ou $C\beta u$, que fait la direction $C\alpha$ à l'extrêmité de la premiére courbe, avec la perpendiculaire Ca, ne doit différer de l'angle de réfraction, c'est-à-dire de l'angle que fait la direction du centre C à l'extrêmité de la seconde courbe, avec la perpendiculaire Ca, que d'un angle infiniment petit du quatriéme ordre; car si du point O l'on mene la perpendiculaire OF à $C\alpha$, on verra qu'à l'origine de la seconde courbe, la force qui pousse le centre C suivant une perpendiculaire à $C\alpha$, est comme CF^3, c'est-à-dire infini-

ment petite du troiſiéme ordre par rapport à $[f-f]$, & cette force va toujours en diminuant le long de la ſeconde courbe, juſqu'à devenir enfin zero abſolu. Or quand même la force qui agit à l'origine de la ſeconde courbe pour pouſſer le centre C perpendiculairement à $C\alpha$, ſeroit ſuppoſée conſtante dans toute l'étendue de cette courbe, qui dans ce cas-ci eſt infiniment petite, ſon action réitérée, ne pourroit (*art.* 271.) diminuer ou augmenter l'angle $aC\alpha$ que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Donc à plus forte raiſon l'angle de réfraction, ne différe de l'angle $aC\alpha$, & par conſéquent le Sinus de réfraction, du Sinus Cu, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre au plus. On peut donc prendre $hc^{n:a} + \frac{h^3c^{n:a}q}{6a^3} - \frac{h^3c^{3n:a}}{2aa}$, ou même ſimplement $hc^{n:a}$ pour le Sinus de réfraction. Mais cette quantité eſt au Sinus d'incidence $\frac{ah}{\sqrt{[aa+bb]}}$ ou h qui en différe très-peu, comme $c^{n:a}$ eſt à 1, c'eſt-à-dire en raiſon conſtante. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

Comme les angles d'incidence & de réfraction ſont ici fort petits, les Sinus de ces angles ne différent point de leurs tangentes ni des Arcs qui en ſont la meſure. Donc *ces angles & leurs tangentes ſont ici en raiſon conſtante.*

REMARQUE VI.

278. Ayant trouvé dans les deux articles précedens

les Sinus d'incidence & de réfraction en raison constante, il semble d'abord qu'on n'en puisse rien conclure pour le rapport des Sinus en général. Néanmoins en examinant la chose de plus près, on peut s'assurer par les calculs de l'*art.* 277. qu'en général les Sinus d'incidence & de réfraction ne sont point en rapport constant. Car la quantité $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{h^3 c^{3n:a}}{2aa}$ ne différe tout au plus du véritable Sinus de réfraction, comme nous l'avons prouvé, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Si donc les Sinus d'incidence & de réfraction étoient exactement en raison constante, comme le Sinus d'incidence est ici (*hyp.*) infiniment petit, il ne s'en faudroit tout au plus que d'une quantité infiniment petite du troisiéme ordre, que le rapport $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{h^3 c^{3n:a}}{2aa}$ au Sinus d'incidence $\frac{ah}{\sqrt{[aa+bb]}}$ ou $h - \frac{h^3}{2aa}$ ne fût constant. Mais le rapport de ces deux quantités, à un infiniment petit du troisiéme ordre près, est $c^{n:a} + h^2 \left(\frac{c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{c^{3n:a}}{2aa} + \frac{c^{n:a}}{2aa}\right)$. Pour démontrer qu'il s'en faut plus d'un infiniment petit du troisiéme ordre, que ce rapport ne soit constant, il suffira de faire voir que la quantité $\frac{c^{n:a} q}{6a^3} - \frac{c^{3n:a}}{2aa} + \frac{c^{n:a}}{2aa}$ dans laquelle il n'entre que des grandeurs finies, n'est pas $= 0$, ou, ce qui est la même chose, que q n'est pas $= 3a(c^{2n:a} - 1)$, ce que je prouve en cette sorte : q est égal à ce que devient la quantité ....

tant que x n'eſt pas $> a$. Mais cette derniére quantité $= 4\,(c^{(2.[f - ſ]\int dx \sqrt{[2ax - xx]}):4pba} - 1)$ & lorſque $x = a$, elle eſt $4\,(c^{2n:a} - 1)$; donc $q > 4a\,(c^{2n:a} - 1)$. *Ce Q. F. D.* Donc *les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point généralement en raiſon conſtante.*

REMARQUE VII.

279. En faiſant attention aux calculs des *art.* 276. & 277. on verra que ſi *dans les deux cas où nous avons trouvé les Sinus en raiſon conſtante, on prend l'angle de réfraction pour angle d'incidence, c'eſt-à-dire ſi on ſuppoſe que le Cercle après s'être enfoncé dans le ſecond Fluide, & y avoir fait quelque chemin, retourne en arriére ſuivant la même direction, & rentre dans le milieu d'où il étoit venu, il reviendra ſous le même angle ſous lequel il étoit entré, c'eſt-à-dire, que l'angle d'incidence deviendra l'angle de réfraction.* Car dans le premier cas, on a $\epsilon = [a - q] . \frac{[f - ſ].c}{4p.8b}$, & le Sinus de réfraction $a - q + \epsilon = [a - q] . (1 + \frac{[f - ſ].c}{4p.8b})$; donc en prenant le Sinus de réfraction $a - q + \epsilon$ pour Sinus d'incidence, on trouvera le Sinus de réfraction $= [a - q + \epsilon] \times (1 + \frac{[ſ - f].c}{4p.8b}) = a - q + \epsilon . \frac{[ſ - f].c}{4p.8b} = a - q$.

Dans le ſecond cas, on a trouvé le Sinus de réfraction $\alpha = hc^{\pm n:a}$. Donc ſi on prenoit α pour le Sinus d'in-

cidence, on auroit le Sinus de réfraction $= \alpha c^{\mp n:a} = h$. Donc &c.

Mais on peut démontrer qu'il n'en eſt pas de même dans tous les cas, & qu'en général les angles d'incidence & de réfraction ne ſont pas réciproques. Car dans l'*art.* 277. nous avons trouvé $\alpha + \frac{\alpha^3}{2aa} = hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3}$. Or $\alpha + \frac{\alpha^3}{2aa}$ eſt l'expreſſion de la tangente correſpondante au Sinus infiniment petit α, & cette quantité, comme nous l'avons fait voir, ne différe tout au plus de la vraye tangente de l'angle de réfraction, que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Donc ſi les angles d'incidence & de réfraction étoient réciproques, il faudroit qu'en prenant $hc^{n:a} + \frac{h^3 c^{n:a} q}{6a^3}$ pour tangente de l'angle d'incidence, on trouvât pour tangente de l'angle de réfraction une quantité, qui ne differât tout au plus de h que d'un infiniment petit du quatriéme ordre. Car il eſt évident que la tangente qu'on trouvera, ne doit différer que d'un infiniment petit du quatriéme ordre de celle qu'on trouveroit, ſi on prenoit la vraye tangente de réfraction pour tangente de l'angle d'incidence : cela ſe voit par les formules de l'*article* 277. Mais la tangente qu'on trouveroit dans ce dernier cas, ne devroit différer de h que d'un infiniment petit du quatriéme ordre, ſi les angles étoient réciproques. Donc &c.

Suppoſons donc, par exemple, que le paſſage ſe ſoit fait d'abord d'un milieu moins réſiſtant dans un autre plus

résistant : l'on aura $\alpha + \frac{\alpha^3}{2aa} = hc^{+n:a} + \frac{h^3 c^{+n:a} q}{6a^3}$.

Prenons maintenant $\alpha + \frac{\alpha^3}{2aa}$ que j'appelle $\mathcal{C}$, pour tangente de l'angle d'incidence : soit $- Q =$ à ce que devient la quantité ....

$$\int \frac{2.[f - f].dx.[2ax - xx]^{\frac{3}{2}}}{pbaa} \times c^{\int(2dx.[f - f].[a - x]^2 \sqrt{[2ax - xx]}):pba^3}$$

lorsque $x = a$, & on trouvera la tangente de l'angle de réfraction, $= \mathcal{C}c^{-n:a} - \frac{\mathcal{C}^3 c^{-n:a} Q}{6a^3}$. Mais l'Equation $\mathcal{C} = hc^{+n:a} + \frac{h^3 c^{+n:a} q}{6a^3}$ donne $h = \mathcal{C}c^{-n:a} - \frac{\mathcal{C}^3 c^{-n:a} q}{6a^3}$.

donc la différence de $\mathcal{C}c^{-n:a} - \frac{\mathcal{C}^3 c^{-n:a}}{6a^3}$ & de h est $\frac{\mathcal{C}^3 c^{-n:a}}{6a^3} \times (qc^{-3n:a} - Q)$. Pour prouver que cette différence est plus qu'infiniment petite du quatriéme ordre, il suffira de faire voir que $qc^{-3n:a}$ n'est pas $= Q$, ce que je démontre ainsi.

On a supposé dans l'*art.* 278, q = à ce que devient la quantité ....

$$\int \frac{2dx.[f - f].\sqrt{[2ax - xx]}}{pb} \times c^{\int(2dx.[f - f].[a - x]^2 \sqrt{[2ax - xx]}):pba^3},$$

lorsque $x = a$, & on a trouvé $q = \mathrm{q} - ac^{-3n:a} + a$: si on suppose de même Q = à ce que devient ....

$$\int \frac{2dx.[f-\mathrm{f}].\sqrt{[2ax-xx]}}{pb} \times$$
$$c^{\int(2dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3},$$

lorſque $x = a$, on aura $\mathcal{Q} = \mathrm{Q} + ac^{-2n:a} - a$. La difficulté ſe réduit donc à prouver que $\mathrm{q}\,c^{-2n:a} > \mathrm{Q}$. Car il eſt évident que $(q - \mathrm{q})\,c^{-2n:a} = \mathcal{Q} - \mathrm{Q}$, & qu'ainſi $qc^{-2n:a} - \mathcal{Q} = \mathrm{q}c^{-2n:a} - \mathrm{Q}$. Or $\frac{\mathrm{q}}{a}$ eſt ce que devient ....

$$\int \frac{2dx.[f-\mathrm{f}].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} \times$$
$$c^{\int(2dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}$$

lorſque $x = a$; & $\frac{\mathrm{Q}}{a}$ eſt ce que devient ....

$$\int \frac{2dx.[f-\mathrm{f}].\sqrt{[2ax-xx]}}{pba} \times$$
$$c^{\int(2dx.[\mathrm{f}-f].[a-x]^2\sqrt{[2ax-xx]}):pba^3}:$$

la premiére de ces deux quantités, comme il eſt aiſé de le voir, eſt plus grande que

$4\,(c^{\int(2dx.[f-\mathrm{f}].\sqrt{[2ax-xx]}):4pba} - 1)$, & la ſeconde eſt $< 4\,(-c^{\int(2dx.[\mathrm{f}-f].\sqrt{[2ax-xx]}):4pba} + 1)$

tant que x n'eſt pas $> a$. Donc $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{Q}} > \frac{4(c^{2n:a}-1)}{4(1-c^{-2n:a})}$. donc $\mathrm{q}c^{-2n:a} > \mathrm{Q}$. *Ce Q. F. D.* Donc *en général les angles d'incidence & de réfraction ne ſont pas réciproques.* Ce Q. F. D.

§. II.

Des loix de la Réfraction, quand la résistance est comme une fonction quelconque de la vitesse.

PROBLÊME IV.

280. *Les mêmes choses étant posées que dans les Problêmes précedens, avec cette seule différence qu'on suppose maintenant la résistance comme une fonction quelconque de la vitesse; on demande la courbe que le Cercle doit décrire.*

La force rétardatrice suivant AC (Figure 80.) sera pour la premiére courbe, (*articles* 259, 260, 262.) $= \frac{4\text{ſ}\varphi u}{3\varphi g} + \frac{[f-\text{ſ}].\varphi u}{3CA^3.\varphi g}(3CA^2.(Ee-MF)+MF^3-Ee^3)$ & cette force multipliée par Ci, sera, suivant le Principe connu, égale à $-mudu$. On aura de plus $\frac{[f-\text{ſ}].\varphi u}{3AC^3.uu.\varphi g} \times (CF^3 - Ce^3) \times Ci^2 = m.oi$. En mettant dans la premiére de ces Equations pour MF, Ee, leurs valeurs $\frac{ady - xdy - dx\sqrt{[2ax-xx]}}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$ & $\frac{ady - xdy + dx\sqrt{[2ax-xx]}}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$, & dans la seconde, pour CF, Ce, oi, leurs valeurs analytiques déja trouvées (Problême II.) on aura deux Equations qui renfermeront x, dx, dy, ddy, u, du avec des constantes. Pour les réduire à une seule dans laquelle u ne se trouve plus, on tirera de chacune de ces deux Equations une valeur de φu, & comparant ensemble ces deux valeurs, on aura une Equation qui ne contiendra plus que

uu, udu, avec x, dx, dy, ddy, & des conſtantes. On tirera de cette Equation par le calcul intégral, la valeur de u, en x, dx, dy, ddy, & cette valeur de u étant remiſe dans l'une des deux Equations, on en aura une nouvelle qui ne contiendra plus u.

Lorſque la fonction donnée φu eſt ſimplement une puiſſance u^n de la viteſſe, le calcul eſt un peu plus ſimple. Car alors on tirera de la premiére Equation la valeur de $u^{1-n}du$ en x, dx, dy, & l'égalant à la valeur de $u^{1-n}du$ trouvée par la différentiation de la ſeconde Equation, on aura l'Equation de la courbe, en x, dx, dy & $dddy$. Mais comme cette Equation eſt très-compliquée de différentielles, & ne paroît pas intégrable, je crois qu'il eſt inutile de la tranſcrire ici.

Pour avoir l'Equation de la ſeconde courbe, il faudra faire (*art.* 263.) la force rétardatrice ſuivant AC, égale à $\frac{2.[f+\text{f}].\varphi u}{3.\varphi g} + \frac{[\text{f}-f].\varphi u}{3CA^3.\varphi g}(3CA^2\,MF - MF^3)$; & la force ſuivant Cb devra être exprimée par $\frac{[f-\text{f}].\varphi u.CF^3}{\varphi g.3CA^3}$. On achevera enſuite le calcul, comme on a fait pour l'Equation de la premiére courbe.

Remarque I.

281. Au reſte, quoique nous ne puiſſions ici conſtruire la courbe, il eſt toujours vrai, 1°. *qu'elle eſt concave vers la perpendiculaire, ſi le milieu où le Cercle entre, réſiſte moins que celui d'où il vient, & au contraire :* 2°. que *le*

centre doit cesser de la décrire avant son immersion totale, excepté dans le cas du n. 2. art. 268. Car il est évident que les raisonnemens que nous avons faits pour prouver ces propositions dans le cas de la résistance comme le quarré de la vitesse, sont applicables à toute autre hypothese de résistance.

REMARQUE II.

282. *Si le Cercle* (Fig. 87) *après avoir passé d'un milieu moins résistant dans un plus résistant, & avoir fait quelque chemin dans ce dernier milieu, repasse maintenant du second milieu dans le premier; je dis qu'il ne reviendra ni par le même chemin, ni par la même courbe.* Car nous venons de démontrer que le Cercle durant une partie du tems de son enfoncement décrit la courbe *BC*, & durant le reste du tems, la partie *CD*, par exemple, de la ligne droite *CF*. Mais si on suppose que le centre parvenu au point *D*, retourne avec la direction *DC*, & rentre dans le Fluide d'où il étoit venu, la résistance du Fluide, l'écartera de sa direction *DC*, dès le premier instant, & l'obligera de décrire la courbe *DV*.

Il est aisé de faire voir de plus, que la courbe *DV*, n'est pas la même que la courbe *BC*. Car quoique la force qui agit au point *D* suivant *DO* perpendiculaire à *DC*, soit infiniment petite, aussi-bien que la force qui agit au point *C* suivant *CQ* perpendiculaire à *DC*, néanmoins la premiére de ces deux forces est encore infiniment grande par rapport à l'autre. Cela se tire aisément de l'*article* 271. Donc &c.

Quand on ſuppoſeroit que le Cercle commençât à rentrer dans le premier Fluide, dès l'inſtant qu'il ſeroit arrivé au point C, il ſeroit encore facile de prouver par les mêmes Principes, qu'il décriroit une courbe différente de CB. Donc &c.

Il eſt évident que les mêmes raiſonnemens auroient lieu, ſi le Cercle étoit venu d'abord d'un milieu plus réſiſtant dans un autre moins réſiſtant.

Lemme.

283. Si un Corps eſt mû dans un Fluide, dont la réſiſtance ſoit comme une puiſſance n de la viteſſe, que g ſoit ſa viteſſe initiale, f la réſiſtance faite par le Fluide à la viteſſe g, a le tems qu'il faudroit à la force f pour faire perdre au Corps tout ſon mouvement, ſuppoſé que cette force f demeurât conſtante ; t le tems écoulé depuis le premier inſtant du mouvement, u la viteſſe reſtante à la fin du tems t ; on aura $\frac{g^{1-n} - u^{1-n}}{[1-n].g^{1-n}} = \frac{t}{a}$; & l'eſpace parcouru pendant le tems t, ſera $\frac{ag^{2-n} - au^{2-n}}{[2-n].g^{1-n}}$. D'où il s'enſuit 1°. que ſi la réſiſtance eſt comme une puiſſance n de la viteſſe, & que n ſoit $=$ ou > 2, la viteſſe ne peut jamais être anéantie par la réſiſtance, & que le Cercle décrira pendant un tems infini, un eſpace infini : ſi au contraire $n < 2$, le Cercle ne peut décrire dans le milieu réſiſtant, qu'un eſpace fini : il mettra un tems infini à parcourir cet eſpace, ſi n eſt $=$ ou < 1, & un tems fini, ſi $n > 1$.

2°.

2°. Il s'enfuit encore, que fi $n < 2$, $\frac{ag}{2-n}$ fera l'efpace entier parcouru par le Corps, & qu'ainfi $\frac{au^{2-n}}{[2-n].g^{1-n}}$, exprimera l'efpace qui lui refte à parcourir depuis le point où la viteffe eft u, jufqu'au point de repos.

REMARQUE III.

284. On peut aifément conclure du Lemme précedent, que dans le cas de $n =$ ou > 2, la réfiftance des deux Fluides n'empêchera point le Cercle de décrire la courbe entiére ; & qu'au contraire dans le cas de $n < 2$, la réfiftance pourra être telle, que le Cercle ne décrive qu'une partie de la courbe.

Or le rayon de la développée $\frac{Ci^3}{oi}$ eft comme $\frac{u^{2-n}}{CF^3 - Ce^3}$ dans la 1re courbe (Fig. 80), & comme $\frac{u^{2-n}}{CF^3}$ dans la feconde (*art.* 269. & 280.). D'où il s'enfuit 1°. que le rayon de la développée eft toujours infini à l'origine. 2°. Qu'il eft encore infini à l'autre extrêmité, fi le Cercle peut y arriver fans que u foit o. 3°. Que fi le Cercle ne peut décrire qu'une partie de la courbe, à l'extrêmité de laquelle u fera par conféquent $= 0$, le rayon de la développée fera $= 0$ à l'extrêmité de cette partie. 4°. Que fi u & CF font zero en même tems, c'eft-à-dire fi la viteffe eft précifément nulle à l'extrêmité de la courbe, alors, prenant un point infiniment proche de cette extrêmité, & appellant s la diftance de ce point à l'extrêmité de la

courbe, on trouvera (*article* 283. *n.* 2.) que u^{2-n} eſt comme s, & qu'ainſi le rayon de la développée pour ce point, ſera comme $\frac{s}{CF^3}$; or en premier lieu, ſi le paſſage ſe fait d'un milieu moins réſiſtant dans un autre plus réſiſtant, il eſt aiſé de prouver qu'on a s $> CF$. Donc $\frac{s}{CF^3}$ eſt infini. Si le paſſage ſe fait dans un milieu moins réſiſtant, alors prenant CF infiniment petit du premier ordre, on trouvera que l'angle de contingence eſt infiniment petit du troiſiéme, puiſque cet angle eſt comme $s u^{n-2}.CF^3$ (*art.* 271. & 273.) & par conſéquent comme CF^3. D'où il s'enſuit que s ne différe de CF que d'une quantité infiniment petite du troiſiéme ordre, tout au plus. Donc $\frac{s}{CF^3}$ eſt encore infini.

REMARQUE IV.

285. Si on ſuppoſe dans le Problême précedent, que chacune des réſiſtances f, f ſoit très-petite, enſorte que f — f & f + f ſoient chacune de très-petites quantités, il eſt clair que la réſiſtance ne peut diminuer la viteſſe que très-peu. Si donc dans l'Equation $\frac{[f - \mathrm{f}] . \varphi u}{3 CA^3 . uu . \varphi g} (CF^3 - Ce^3) \times Ci^2 = m . oi$, on prend g pour la viteſſe initiale, on pourra mettre g à la place de u & à la place de g^2 ſa valeur $\frac{2pb}{m}$, ce qui donne $\frac{[f - \mathrm{f}]}{3 CA^3 . 2pb} (\frac{CF^3 - Ce^3}{3 CA^3}) \times Ci^2 = oi$ &

$\frac{[f-\mathrm{f}].CF^3.Ci^2}{2pb.3CA^3} = oi$. Ces Equations ne diffèrent point de celles que nous avons données pour le cas de $[f-\mathrm{f}]$ très-petite, dans l'hypothefe de la réfiftance comme le quarré de la viteffe. Il y a feulement cette différence, que dans l'hypothefe de la réfiftance comme le quarré de la viteffe, la donnée $g^2 = \frac{2pb}{m}$ exprimoit une viteffe donnée à volonté, au lieu qu'ici elle exprime la viteffe initiale.

De-là il s'enfuit 1°. (*art.* 276.) *que fi on fuppofe* $[f+\mathrm{f}]$ *&* $[f-\mathrm{f}]$ *toutes deux très-petites, c'eft-à-dire, que chacun des deux milieux réfifte peu, les Sinus d'incidence & de réfraction font en raifon conftante, quelque hypothefe que l'on faffe fur la Loi de la réfiftance.*

2°. On a par l'*art.* 276. $\alpha = \frac{[a-q].[f-\mathrm{f}].ca^3}{4p.(2aq-qq)^{\frac{1}{2}}.8b}$, d'où il eft clair que $a-q$ reftant la même dans cette Equation, c'eft-à-dire le Sinus d'incidence reftant le même, la quantité α, qui exprime ce dont la tangente de l'angle d'incidence doit être augmentée pour devenir la tangente de l'angle de réfraction, fera comme $\frac{[f-\mathrm{f}]}{2pb}$ ou comme $\frac{[f-\mathrm{f}]}{gg}$, en fuppofant que m refte la même. Mais $\frac{[f-\mathrm{f}]}{gg}$ eft comme $\frac{\varphi g}{gg}$, & fi on prend $\varphi g = g^n$, on trouve que $\frac{[f-\mathrm{f}]}{gg}$ eft comme g^{n-2}. donc α eft comme g^{n-2}.

Kk ij

D'où il s'enſuit : 1°. que ſi $n = 2$, α ſera la même quelle que ſoit la viteſſe initiale g, ce qui a déja été prouvé *art.* 276 : 2°. que ſi $n > 2$, α ſera d'autant plus petite que g ſera plus petite ; *la réfraction ſera donc d'autant moindre dans le cas de* n > 2, *que la viteſſe initiale ſera moindre :* 3°. enfin, *ſi* n < 2, il eſt clair que *la réfraction ſera d'autant moindre que la viteſſe initiale ſera plus grande, & au contraire.*

REMARQUE V.

286. Nous venons de voir que quand les milieux réſiſtent peu, les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante, quelque hypotheſe que l'on faſſe ſur la Loi de la réſiſtance. Nous avons fait voir de plus, (*article* 276.) que dans le cas particulier de la réſiſtance comme le quarré de la viteſſe, les Sinus ſont encore en raiſon conſtante, lorſque les deux milieux différent peu l'un de l'autre en réſiſtance, quelle que ſoit d'ailleurs la réſiſtance particuliére de chacun : mais il ne faut pas ſe hâter de conclure qu'il en eſt de même dans toute autre hypotheſe ſur la réſiſtance, lorſque f — f eſt très-petite, f + f demeurant finie : car l'expreſſion du rapport des Sinus dans ce cas-là, n'eſt point égale à une quantité conſtante.

Pour le démontrer ; toutes choſes demeurant les mêmes que dans l'*art.* 276, on aura pour la premiére courbe

$$dz = \frac{2.[f - \mathrm{f}]\varphi u}{3mnu\varphi g.a^5}(3.aa.[a-x]_2 hdx\sqrt{[2ax-xx]} + b^3dx.[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}) \ldots\ldots\ldots\ldots (G)$$

& pour la feconde courbe

$$dz = \frac{2.[f-f]\,\varphi u}{3\,m\,u\,u\,\varphi g\,.\,a^3}.dx(aa-ax+h\surd[2ax-xx])^3..(H).$$

Soit $\frac{2.[f-f]}{m\varphi g}\,\epsilon =$ à ce que devient l'intégrale du fecond membre de l'Equation G, lorfque $x=q$; & $\frac{2.[f-f]}{m\varphi g}\gamma =$ à ce que devient l'intégrale du fecond membre de l'Equation H lorfque $x=2a-q$, cette intégrale étant zero quand $x=q$; & l'on trouvera α, qui eft l'excès de la tangente de l'angle de réfraction fur la tangente de l'angle d'incidence, égale à $\frac{2.[f-f]}{m\varphi g}(\epsilon+\gamma)$. La queftion fe réduit donc à prouver que α n'eft pas en rapport conftant avec $\frac{a^3.(a-q)}{[2aq-qq]^{\frac{3}{2}}}$, ou, ce qui eft la même chofe, à caufe de la quantité conftante $\frac{2.[f-f]}{m\varphi g}$, que $\epsilon+\gamma$ n'eft pas $= R.\frac{a^3.a-q}{[2aq-qq]^{\frac{3}{2}}}$. R exprimant une quantité conftante.

La difficulté principale eft d'avoir l'expreffion de $\frac{\varphi u}{u u}$ en x. Car comme $\frac{\varphi u}{u u}$ entre dans l'expreffion de ϵ & de γ, on ne peut fans cela trouver la valeur analytique de ces quantités. Mais cet inconvénient difparoîtra, fi l'on fait les remarques fuivantes.

1°. Quelle que foit l'expreffion de $\frac{\varphi u}{u u}$ en x, il eft au moins certain, que les deux milieux différant peu l'un

de l'autre, comme on le suppose ici, cette expression sera la même, que si les deux milieux n'en faisoient qu'un seul, & que le centre C décrivit la droite CA. 2°. Dans ce cas, l'Equation entre x & u sera $\frac{4f\varphi u.dx\sqrt{[aa+bb]}}{3m\varphi g.a} = -udu$, & la quantité $\frac{\varphi u}{uu}$ quelle qu'elle soit, contiendra f, m, g; & $\frac{x\sqrt{[aa+bb]}}{a}$. Ainsi ε & γ ne renfermeront que des grandeurs finies, dont aucune ne différera infiniment peu de l'autre. Donc si $\varepsilon+\gamma$ n'est pas exactement $= R \times \frac{a^3(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, ces deux quantités ne différeront nécessairement l'une de l'autre d'une grandeur finie.

Or, si f étant finie, $\varepsilon+\gamma$ étoit exactement égale à $R \times \frac{a^3(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, elle le seroit encore f étant infiniment petite. Prouvons donc que quand f est infiniment petite, $\varepsilon+\gamma$ n'est pas exactement égale à $R . \frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$.

Dans ce cas, l'Equation $\frac{4f\varphi u.dx\sqrt{[aa+bb]}}{3m\varphi g.a} = -udu$. devient $\frac{4fdx\sqrt{[aa+bb]}}{3mag} = -du$, & $u = g - \frac{4fx\sqrt{[aa+bb]}}{3ma}$. De plus, si on prend Vdu pour la différence de $\frac{\varphi u}{uu}$, & qu'on appelle G ce que devient V, en y mettant g à la place de u, on aura, lorsque f est infiniment petite, $\frac{\varphi u}{uu} =$

$\frac{\varphi g}{gg} - \frac{G.4fx[aa+bb]}{3mag}$, à un infiniment petit du fecond ordre près.

De-là, après un affez long calcul, mais qu'on peut abreger par différentes voyes, on tire

$\epsilon + \gamma = \frac{ca^3.(a-q)}{32.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\varphi g}{gg} - \frac{G.4f\sqrt{[aa+bb]}}{3mg}\right) + \frac{G.4f\sqrt{[aa+bb]}}{5.9ma^6g}[5ha^4.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}} + (h^3 - 3haa) \times (2aq-qq)^{\frac{5}{2}} + a^3.(a-q)^5 + 5hha^3.(a-q)^3 - 3hha.(a-q)^5]$. Cette valeur de $\epsilon + \gamma$ ne différe de la véritable que d'un infiniment petit du fecond ordre, il faudroit donc qu'elle ne s'éloignât d'être un multiple de $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$ que d'un infiniment petit du fecond ordre, ou, ce qui eft la même chofe, il faudroit qu'en mettant dans la quantité précedente, pour h fa valeur $\frac{aa-aq}{\sqrt{[2aq-qq]}}$, cette quantité fe divisât exactement par $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$, & que le quotient ne contînt point q. Or il eft aifé de voir au premier coup d'œil que cela n'eft pas. Donc &c.

Il eft à remarquer, que quand $\frac{\varphi u}{uu}$ eft une quantité conftante, c'eft-à-dire quand $\varphi u = uu$, alors, & dans ce feul cas $V = 0$, & par conféquent $G = 0$, & $\epsilon + \gamma$ eft un multiple exact de $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$ comme on l'a déja vû (*article* 276).

Donc *quand les deux milieux ſont chacun d'une réſiſtance finie, & qu'ils différent infiniment peu l'un de l'autre, les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont en raiſon conſtante, que dans le ſeul cas où la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe.*

COROLLAIRE I.

287. De-là & de l'*article* 278, il s'enſuit, qu'*il n'y a aucune hypotheſe ſur la réſiſtance où les Sinus ſoient généralement en raiſon conſtante.*

On peut encore démontrer cette derniére propoſition; pour tous les cas poſſibles de réſiſtance, excepté celui où elle eſt comme le quarré de la viteſſe, en ſuppoſant dans l'*art.* 286. f & f chacune infiniment petite du premier ordre, & [f — f] infiniment petite du ſecond. En effet, multipliant par $\frac{2.[f - \mathrm{f}]}{m\varphi g}$ la valeur de $\epsilon + \gamma$ trouvée (*art.* 286.) on auroit l'expreſſion de α à un infiniment petit du quatriéme ordre près, & on trouveroit qu'il s'en faudroit plus d'un infiniment petit du quatriéme ordre, que cette valeur de α ne fût un multiple de $\frac{a^3.(a-q)}{(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}$. Mais cette démonſtration engageroit en d'aſſez longs diſcours, par la néceſſité d'avoir égard aux quantités qu'on négligeroit; d'ailleurs la démonſtration donnée (*art.* 286.) a cet avantage, qu'elle fait voir que les Sinus ne ſont pas en raiſon conſtante, non-ſeulement lorſque [f — f] eſt finie, mais encore lorſqu'elle eſt infiniment petite.

COR. II.

COROL. II.

288. *Les tangentes ni les ſecantes des angles d'incidence & de réfraction, ne ſont jamais en rapport conſtant, quelque hypotheſe qu'on faſſe ſur la réſiſtance.*

Car 1°. lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe, & que $f - f$ eſt fort petite, nous avons fait voir (*art.* 278.) que les Sinus ſont en raiſon conſtante. Donc les tangentes ni les ſecantes ne ſont pas en rapport conſtant, lorſque $f - f$ eſt fort petite. Donc en général elles ne ſont pas en rapport conſtant.

2°. Dans toute autre hypotheſe que celle de la réſiſtance comme le quarré de la viteſſe, il faudroit pour que les tangentes fuſſent en raiſon conſtante, que α ou $\varepsilon + \gamma$ fût un multiple exact de $\frac{aa - aq}{\sqrt{[2aq - qq]}}$, ce qu'on prouvera être impoſſible, comme on a fait voir (*art.* 286.) que que $\varepsilon + \gamma$ n'eſt pas un multiple exact de $\frac{a^2 . (a - q)}{(2aq - qq)^{\frac{3}{2}}}$. Pour que les ſecantes fuſſent en raiſon conſtante, il faudroit que $\frac{ab}{aa + hh}$ fût une quantité conſtante, c'eſt-à-dire que α fût un multiple exact de $\frac{a^2}{(a - q) \sqrt{[2aq - qq]}}$, ce qui peut encore être démontré impoſſible de la même maniére. Donc &c.

REMARQUE VI.

289. Il ne sera pas inutile d'observer ici que *les propositions démontrées* (art. 286. & 287.) *sont également vrayes, quand même le rayon du Cercle seroit infiniment petit.* Car l'Equation $\frac{4f\varphi u}{3m\varphi g} \times \frac{dx . \sqrt{[aa + bb]}}{a} = - udu$, & les Equations G, H, font voir que toutes choses d'ailleurs égales, deux Cercles, dont l'un seroit fini, l'autre infiniment petit, souffriroient dans le cas de l'*art.* 286, la même réfraction. Donc &c.

REMARQUE VII.

290. Nous avons prouvé dans l'*art.* 277. que *quand la résistance est comme le quarré de la vitesse, & que l'angle d'incidence est fort petit, les Sinus des angles d'incidence & de réfraction, sont en raison constante.* Nous allons démontrer que cette proposition est vraye dans toutes sortes d'hypotheses de résistance.

En effet pour avoir en général l'Equation de la courbe, il ne faut que mettre dans l'Equation (1) de l'*art.* 277. $\frac{[f - f]\varphi u}{muu\varphi g}$ au lieu de $\frac{[f - f]}{2pb}$, en négligeant le terme où est h^3, & on verra, que le rapport du Sinus de réfraction au Sinus d'incidence, est exprimé par ce que devient la quantité ....

$c^{2\int(dx[f - f]\varphi u . [a - x]^2 \sqrt{[2ax - xx]}) : muu\varphi g . a^3}$ lorf-

que $x = a$; or comme l'angle d'incidence eſt ici ſuppoſé fort petit, la viteſſe u, lorſque le centre eſt enfoncé de la quantité x doit être cenſée la même, que ſi le paſſage ſe faiſoit perpendiculairement d'un Fluide dans l'autre. Donc g étant conſtante, $\frac{\varphi u}{uu}$ eſt toujours la même lorſque $x = a$. Donc &c.

Il eſt encore évident que *dans le cas précedent & dans celui de l'*article 286. *les angles d'incidence & de réfraction ſont réciproques.* Cela ſe prouve comme dans l'*art.* 279.

On peut encore tirer ſans beaucoup de peine de l'article préſent & de l'*article* 286. une nouvelle démonſtration des Propoſitions qu'on a prouvées (*art.* 285.).

Remarque VIII.

291. On a démontré dans l'*art.* 279. *que les angles d'incidence & de réfraction ne ſont point réciproques, lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe.* Nous allons faire voir *que ces mêmes angles ne ſont réciproques dans aucune hypotheſe*, ce qu'on doit être déja aſſez porté à croire, après ce qui a été dit (*article* 282.).

Pour démontrer cette Propoſition, nous ſuppoſerons que l'angle d'incidence ſoit fort petit; que les réſiſtances f, f, ſoient chacune très-petite, & de plus que f — f ſoit infiniment petite par rapport à chacune d'elles, c'eſt-à-dire, ſi l'on veut, que f ſoit infiniment petite du premier ordre, & f — f du ſecond.

Nous mettrons dans l'Equation (1) de l'*article* 277.

$\frac{[f-\text{f}]\varphi u}{mun.\varphi g}$ pour $\frac{[f-\text{f}]}{2pb}$: de plus, l'Equation $(\frac{4f\varphi u}{3\varphi g} + \frac{[f-\text{f}]\varphi u}{3CA^3.\varphi g}[3CA^2.(Ee - MF) + MF^3 - Ee^3]) \times \frac{dx\sqrt{[aa+zz]}}{a} = -mudu$ trouvée dans l'*art.* 280, fait voir que la valeur approchée de $\frac{\varphi u}{mun\varphi g}$, si $\varphi u = u^n$ sera, à un infiniment petit du troisiéme ordre près .... $1:(2pb-(2-n)[\frac{4fx}{3}+\frac{[f-\text{f}]}{3a^3}(3aa.\int 2dx\sqrt{[2ax-xx]}-2\int dx.[2ax-xx]^{\frac{3}{2}})])$.

Présentement, si on se ressouvient que $c^t = 1+t+\frac{tt}{2}$ &c. on trouvera que la tangente de l'angle de réfraction est $\frac{h}{a}[1+(f-\text{f})P+(2-n).\text{f}.(f-\text{f})K+(f-\text{f})^2 \times (\frac{P^2}{2}+[2-n].\Gamma)+(f-\text{f}).\text{ff}.T]+h^3(f-\text{f})Q$. P, T, K, Γ, Q, étant des quantités finies, & des fonctions de a dans lesquelles f ni f n'entrent point. On remarquera que cette expression ne différe de la vraye valeur de la tangente qu'on cherche, que d'un infiniment petit du sixiéme ordre. Donc si les angles d'incidence & de réfraction sont réciproques, il faut qu'en prenant cette expression pour tangente de l'angle d'incidence, on trouve pour tangente de l'angle de réfraction, une quantité qui ne différe de h que d'un infiniment petit du sixiéme ordre tout au plus.

En nommant α la tangente de l'angle de réfraction trouvée ci-dessus, on a

$$h = \alpha : (1 + [f - \mathrm{f}]P + (2 - n).\mathrm{f}.[f - \mathrm{f}]K + [f - \mathrm{f}]^2 \times (\frac{P^2}{2} + [2 - n].\Gamma) + [f - \mathrm{f}].\mathrm{ff}.T) - \alpha^3.[f - \mathrm{f}]Q = \alpha(1 - [f - \mathrm{f}]P - [2 - n].\mathrm{f}.[f - \mathrm{f}]K + [f - \mathrm{f}]^2 \times P^2 - [f - \mathrm{f}]^2(\frac{P^2}{2} + [2 - n].\Gamma) - [f - \mathrm{f}].\mathrm{f}^2 T) - \alpha^3[f - \mathrm{f}]Q$$

: & si on prenoit α pour la tangente de l'angle d'incidence, on auroit pour celle de l'angle de réfraction

$$\alpha(1 - [f - \mathrm{f}]P - [2 - n].f.[f - \mathrm{f}]K + [f - \mathrm{f}]^2 \times (\frac{P^2}{2} + [2 - n].\Gamma) - [f - \mathrm{f}].ff.T) - \alpha^3[f - \mathrm{f}]Q.$$

La différence de cette quantité & de la valeur de h trouvée ci-dessus, est (en négligeant les quantités infiniment petites du sixiéme ordre) $[2 - n].\alpha.[f - \mathrm{f}]^2 \times (K - 2\Gamma)$. or $\alpha.[f - \mathrm{f}]^2$ étant une quantité infiniment petite du cinquiéme ordre, il suffira pour faire voir que $\alpha.[f - \mathrm{f}]^2(K - 2\Gamma)$ est plus qu'infiniment petite du sixiéme ordre, de démontrer que l'expression $K - 2\Gamma$, qui ne renferme que des quantités finies, n'est pas $= 0$. Or K est égale à ce que devient $\int(8dx.(a - x)^2.x\sqrt{[2ax - xx]}) : 3a^3(2pb)^2$ lorsque $x = a$, & 2Γ égale à ce que devient dans le même cas $2\int(\frac{2dx.(a-x)^2\sqrt{[2ax - xx]}}{3a^6(2pb)^3}[3.aa.\int 2dx\sqrt{[2ax - xx]} - 2\int dx.(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}])$. La quantité K s'intégre simplement par la quadrature du Cercle. L'autre quantité est l'in-

tégrale de $\frac{4}{a^3 (2pb)^2} \left(\frac{d[(a-x).(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}] + aadx\sqrt{[2ax-xx]}}{4} \right) \times$ $\left[3 \int \frac{aadx\sqrt{[2ax-xx]}}{2} - \frac{2.(a-x).(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{4.3.a^3} \right]$; d'où l'on voit qu'il doit se trouver dans la différentielle, la quantité $dx\sqrt{[2ax-xx]} \int dx\sqrt{[2ax-xx]}$ qui ne sera détruite par aucune autre, & dont l'intégrale $\frac{(\int dx\sqrt{[2ax-xx]})^2}{2}$ renfermera lorsque $x = a$, le quarré de la circonférence. Donc $K - 2\Gamma$ n'est pas $= 0$.

Donc *la résistance étant comme une puissance quelconque de la vitesse autre que le quarré, les angles d'incidence & de réfraction ne sont pas réciproques.*

La démonstration précedente s'étend aux cas où φu est non-seulement u^n, mais une fonction quelconque de la vitesse. Car en général $\frac{\varphi u}{uu\varphi g}$ peut être exprimé par $\frac{1}{2pb} + G\left(\frac{4\mathrm{f}x}{3} + \frac{[f-\mathrm{f}]}{3a^3}[3aa.\int 2dx\sqrt{[2ax-xx]} - 2\int dx.(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}]\right) + B\mathrm{f}^2\Delta x$, Δx exprimant une fonction de x, & G, B, des quantités qui dépendent de la différentiation de $\frac{\varphi u}{uu}$, & qui ne sont nulles que quand $\frac{\varphi u}{uu}$ est constante, c'est-à-dire quand $\varphi u = u^2$. Or ce qui pourroit empêcher la démonstration précedente de s'appliquer à ce cas-ci, c'est la quantité $B\mathrm{f}^2\Delta x$; mais cette quantité $B\mathrm{f}^2\Delta x$ doit s'évanouir dans le calcul, & il n'y a que les quantités affectées de $[f-\mathrm{f}]^2$ qui doivent y rester. Donc &c.

De-là & de l'*art.* 279, il s'ensuit qu'*en général dans aucune hypothese de résistance, les angles d'incidence & de réfraction ne sont réciproques.*

§. III.

Des Loix de la réfraction, lorsque le mobile est pesant.

PROBLÊME V.

292. *Trouver la courbe que décrit un Cercle pesant, lorsqu'il passe d'un Fluide dans un autre.*

Soit CA (Fig. 88) la direction du centre C dans un instant quelconque, où la quantité de l'enfoncement est EaM : soit l'effort absolu de la pesanteur, représenté par CG, & décomposé en deux autres ; l'un suivant CL, l'autre suivant CH. Il est clair que si le passage se fait d'un milieu plus résistant dans un autre moins résistant, l'effort du Fluide pour écarter le centre C de sa direction CA, sera aussi dirigé suivant CH : la courbe dans ce cas sera donc concave dans toute son étendue vers la perpendiculaire Ca. Si au contraire le passage se fait d'un milieu moins résistant dans un autre plus résistant, alors, l'effort du Fluide étant dirigé suivant CQ, pourra l'emporter sur l'effort suivant CH ; mais je dis qu'il ne pourra l'emporter que dans la partie moyenne de la courbe. Car si la pesanteur n'agissoit que suivant CL, pour accélerer le mouvement le long de la courbe, & nullement suivant CH, il est évident (*art.* 269. & 284.) que le rayon de la développée seroit infini aux deux extrê-

mités de la courbe ; mais la pesanteur agissant seule & suivant CH, le centre C décriroit à ces deux extrêmités un petit Arc de courbe dont le rayon osculateur seroit fini ; donc la courbe à ses deux extrêmités doit tourner sa concavité vers la perpendiculaire. Donc elle ne peut être convexe que dans sa partie moyenne.

Pour avoir l'Equation de cette courbe, on nommera la pesanteur p, & on trouvera pour la premiére courbe (Figure 80.)

$$pdx + Ci\left(\frac{[f+\mathrm{f}].\varphi u}{3CA^3.\varphi g}[3AC^2(Ee-MF)+MF^3-Ee^3]\right) + \frac{4\mathrm{f}\varphi u}{3\varphi g}\times Ci = mudu.$$

$$\& \frac{p\sqrt{[dx^2+dy^2]}.dy}{uu} - \frac{Ci^2}{uu}\left(\frac{[f-\mathrm{f}].\varphi u}{3CA^3.\varphi g}[CF^3-Ce^3]\right) = m.oi.$$

On chassera u de ces deux Equations par la même Méthode qu'on a employée dans l'*article* 280, & on aura l'Equation de la premiére courbe en x, ddy, $dddy$. De même pour avoir la seconde courbe, on se servira des Equations

$$pdx + Ci\left(\frac{2.[f+\mathrm{f}].\varphi u}{3.\varphi g} + \frac{[\mathrm{f}-f].\varphi u}{3CA^3.\varphi g}[3CA^2.MF-MF^3]\right) = mudu.$$

$$\& \frac{pdy\sqrt{[dx^2+dy^2]}}{uu} - \frac{Ci^2}{uu}\left(\frac{[f-\mathrm{f}].\varphi u}{3CA^3.\varphi g}[CF^3-Ce^3]\right) = m.oi.$$

Si on veut que les indéterminées soient séparables dans les Equations précedentes, on supposera que les quantités p, f, f soient très-petites. La courbe décrite durant le

le paſſage ſera très-peu différente d'une droite, & la viteſſe, peu augmentée d'un côté par la peſanteur, & peu diminuée de l'autre par la réſiſtance, pourra être regardée comme conſtante. Sì donc on prend $g = \sqrt{\frac{[2pb]}{m}}$ pour la viteſſe initiale, on aura pour la premiére courbe, (en mettant pour CF, Ce, oi, leurs valeurs analytiques déja trouvées Probl. II. & faiſant $ady = (z + h) . dx$) ......

$$\frac{3pdx . b . (hh + aa)}{2pb} - \frac{[f - f]}{a^3} (6 . aa . [a - x]^2 . hdx \times \sqrt{[2ax - xx]} + 2h^3dx . [2ax - xx]^{\frac{3}{2}}) = - 3a^2dz.$$

Equation d'où l'on peut tirer aiſément la valeur de z en x.

On trouvera de même l'Equation en z & en x pour la ſeconde courbe.

Si dans ces Equations on ſuppoſe $dz = 0$, on aura les valeurs de x qui porteront aux points d'inflexion des deux courbes.

Il eſt à remarquer que ces valeurs de x ne doivent pas être plus grandes que q pour la premiére courbe, en prenant $a - q$ pour le Sinus d'incidence : & pour la ſeconde courbe, les valeurs de x ne doivent pas être plus grandes que $2a - q$.

La force ſuivant Cb eſt dans le cas préſent la plus grande qu'il eſt poſſible, lorſque le centre eſt arrivé à l'extrêmité de la premiére courbe ; cela ſe peut voir aiſément. Si l'action de la peſanteur ſuivant CB eſt plus petite que la plus grande valeur de la force ſuivant Cb, il aura deux points d'inflexion, un ſur la premiére & un ſur la ſeconde

courbe. Dans tout autre cas, la courbe ſera entiérement concave vers *Ca*.

En ſuivant les mêmes raiſonnemens & conſervant les mêmes noms que dans l'*article 276*, on trouvera

$$\frac{a.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}{a^3.(a-q)}=\frac{q-2a}{2b}+\frac{[f-f].c}{4p.8b}:$$

On voit par-là que *les Sinus d'incidence & de réfraction ne ſont point en raiſon conſtante, lorſque le Cercle eſt ſuppoſé peſant : qu'il y a même des cas où les Sinus d'incidence & de réfraction ſont égaux*, ſavoir lorſque $a-q=-a+\frac{[f-f].c}{16p}$.

Au reſte, comme le Cercle eſt ici ſuppoſé peſant, il eſt clair que même après ſon immerſion dans le nouveau milieu, il continue à décrire une courbe : ainſi dans le cas dont il s'agit, il n'y a point de réfraction proprement dite ; lorſque le Cercle a ceſſé de décrire la ſeconde courbe, c'eſt-à-dire, dès qu'il préſente une moitié entiére à l'action du ſecond Fluide, il commence à décrire une troiſiéme courbe toute différente des deux premiéres, & qui n'eſt à proprement parler, que la trajectoire dans un milieu réſiſtant ; nous ne dirons rien ici de cette trajectoire, dont la recherche n'eſt point de notre ſujet, quant à préſent, & que Meſſieurs *Bernoulli*, *Herman*, &c. ont trouvée il y a déja longtems.

REMARQUE I.

293. Si la peſanteur eſt ſuppoſée finie, & les réſiſ-

tances f, f chacune infiniment petite, la courbe décrite différera très-peu d'une parabole : de-là il eſt aiſé de conclure (*Prop.* 94. *Liv.* 1. *Sect.* 14. *des Princip. Math.*) que les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon conſtante, pourvû qu'on ſuppoſe le rayon a conſtant, auſſi-bien que la viteſſe initiale.

Pour pouvoir donc appliquer cette Théorie à la réfraction de la lumiére, il faut ſuppoſer que les rayons à leur approche de la ſurface réfringente, ſont pouſſés vers cette ſurface par une force infiniment grande, pour ainſi dire, par rapport à la réſiſtance qu'ils éprouvent dans chacun des deux milieux.

Comme la recherche de la courbe de réfraction dans le cas préſent, où nous ſuppoſons la peſanteur finie, & la réſiſtance des milieux fort petite, renferme quelques difficultés, nous finirons cette ſection par la ſolution de ce Problême.

Il eſt viſible, en premier lieu, que les réſiſtances f, f étant infiniment petites, non-ſeulement la courbe cherchée différera très-peu d'une parabole, mais encore, que la viteſſe à chaque point de la courbe ſera la même à peu près que dans une parabole. Or la viteſſe à chaque point de la parabole ſeroit $\sqrt{[2pb+2px]}$; par conſéquent $\sqrt{[2pb+2px]}-t$, exprimera la viteſſe à chaque point de la courbe, t étant une quantité très-petite. D'ailleurs, l'Equation de la parabole, ſeroit, comme il eſt aiſé de le trouver, $dy=hdx:\sqrt{[aa+\frac{aax+bhx}{b}]}$: ainſi nous ſup-

poſerons le dy de la courbe, égal à $hdx : \sqrt{[aa + \frac{aax + bbx}{b}]}$ $+ \frac{zdx}{a}$, z étant de même une quantité fort petite.

On aura donc $uu = 2pb + 2px - 2t\sqrt{[2pb - 2px]}$ & la premiére Equation ſera, en ôtant ce qui ſe détruit de part & d'autre

$$\frac{[f - \mathrm{f}].\varphi u.Ci}{3CA^3.\varphi g}(3CA^2.[Ee - MF] + MF^3 - Ee^3) + \frac{4\mathrm{f}\varphi u}{\varphi g} \times Ci = dt\sqrt{[2pb + 2px]} + \frac{tpdx}{\sqrt{[2pb + 2px]}}$$

: on ſubſtituera dans le premier membre, pour MF & Ee leurs valeurs trouvées (*art.* 280.), mais dans ces valeurs il faudra à la place de dy, mettre ſimplement .... $hdx : \sqrt{[aa + \frac{aax + bbx}{b}]}$; on mettra de même $\sqrt{[2pb + 2px]}$, à la place de u, parce que les termes où entreroient t & z, feroient nuls par rapport aux autres. Par-là on aura en intégrant une valeur de $t\sqrt{[2pb + 2px]}$ exprimée en x, que je ſuppoſerai pour abréger, égale à $f\int dx \Psi x + \mathrm{f}\int dx \Delta x$.

Dans l'autre Equation

$$(I) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{pdy.(dx^2 + dy^2)}{uu} - \frac{[f - \mathrm{f}].\varphi u}{\varphi g.3a^3} \times [(adx - xdx + dy\sqrt{[2ax - xx]}^3) - (adx - xdx - dy \times \sqrt{[2ax - xx]})^3] = - dxddy$$

, on ne doit ſubſtituer ſimplement $\sqrt{[2pb + 2px]}$ à la place de u, & $hdx : \sqrt{[aa + \frac{aax + bbx}{b}]}$ à la place de dy, que dans la partie du premier membre, dont tous les termes ſont mul-

tipliés par la quantité très-petite $f - f$. Car en opérant de la même maniére dans la partie $\frac{p dy (dx^2 + dy^2)}{nn}$, dans laquelle p eſt une quantité finie, on négligeroit des quantités de même eſpece que celles qui ſont multipliées par $f - f$; il faudra donc ſeulement y négliger les termes où z & t ſe trouveroient à la fois : mettant enſuite au lieu de $t\sqrt{[2pb + 2px]}$ ſa valeur $ffdx\Psi x + ffdx\Delta x$ dans l'Equation (I) on aura une Equation différentielle qui ne contiendra que x, dx, avec des conſtantes, & la différentielle dz avec z ſeulement au premier degré ; d'où l'on voit qu'il ſera aiſé d'en tirer par le calcul intégral, la valeur de z en x.

Il eſt facile maintenant de trouver par les Principes déja expliqués, le point où doit finir la premiére courbe, & de déterminer auſſi la nature de la ſeconde courbe, en uſant des mêmes précautions que pour la premiére. Ainſi nous croyons qu'il n'eſt pas néceſſaire d'aller plus loin.

REMARQUE II.

294. J'obſerverai en finiſſant cette ſection, que quoique nous ayons fait juſqu'ici abſtraction de la peſanteur des deux Fluides, on peut cependant y avoir égard, ſi l'on veut : il n'en réſultera d'autre changement dans les Problêmes précedens, ſinon que la peſanteur du mobile au lieu d'être conſtante, ſera variable à chaque inſtant, & pourra même quelquefois devenir négative. Il ne faut pas croire, au reſte,

que le centre de gravité du mobile ſoit différent ici de ſon centre de figure. Car la diminution de ſon poids ne procéde que de l'action du Fluide ſur ſa ſurface, & cette action eſt toujours dirigée ſuivant une ligne qui paſſe par le centre, de maniére que les efforts ſe réuniſſent toujours ici au centre du Cercle.

SECTION II.

De la réfraction de la Sphére.

Préparation pour les propoſitions ſuivantes.

295. Suppoſons qu'une Sphére s'enfonce dans un Fluide quelconque, & que *CA* (Fig. 89) ſoit la direction du centre *C* dans un inſtant de l'immerſion. Imaginons un grand Cercle *NEM*, dont le plan paſſe par *CA*, & ſoit perpendiculaire à la ſurface du Fluide. Que *EaM* ſoit le profil, ou la coupe de la partie enfoncée, & ſoit imaginé le demi-Cercle *EεM*, perpendiculaire au plan *NEM*. Il eſt clair que le ſegment circulaire *EaM* diviſe la partie enfoncée de la Sphére, en deux parties égales, dont l'une eſt *EεMaE*, & l'autre doit être imaginée de l'autre côté du plan *EaM*.

Maintenant par deux points quelconques *P*, *p*, pris ſur la ligne *CA* infiniment près l'un de l'autre, ſoient menées les lignes *PQ*, *pq* perpendiculaires à *CA* & paralléles à *CB*, & par les lignes *PQ*, *pq*, faites paſſer les plans *PQε*, *pqc*, perpendiculaires au plan *NEM*; leurs communes ſections avec le ſegment *EεMaE* formeront les Arcs *Qε*, *qc*, qui renfermeront la petite zone par-

tielle $Q\epsilon cq$, dont la semblable est de l'autre côté du plan EaM.

Il s'agit de trouver la résistance que fait le Fluide à ces deux petites Zones, mues suivant la direction QK parallèle à CA; ce qu'il en résulte d'effort contre le centre C; & la direction de cet effort; afin d'avoir, en intégrant, la résistance que souffre le centre C, de l'impression du Fluide contre la partie $E\epsilon MaE$, & contre la partie semblable, qui est de l'autre côté du plan EaM.

Pour cela, je prolonge d'abord la ligne CA vers N, & par les points N, A, ϵ, je fais passer un grand Cercle de la Sphère dont l'Arc ϵi coupe qc en i, & je remarque que les Zones $Q\epsilon cq$, $Q\epsilon iq$ ne diffèrent l'une de l'autre, que d'une quantité ϵci infiniment petite par rapport à elles. D'où je conclus que la résistance pour la Zone $Q\epsilon iq$, sera la même que pour la Zone $Q\epsilon cq$. Le Problême se réduit donc à celui-ci.

PROBLÊME VI.

296. *Un Spheroide étant mû dans un Fluide, suivant la direction de son Axe* AN, (Fig. 90) *trouver la résistance que souffre la Zone* RQεcqr *divisée en deux parties égales par le plan* NQA.

1°. Soient menées les lignes ϵP, QP, RP, perpendiculaires à l'Axe AN, & les lignes cp, qp, rp, qui leur soient parallèles, & cn perpendiculaire à ϵP; on aura $\epsilon n = Pp$; $\epsilon c = Qq = Rr$.

2°. Maintenant du rayon Pn (Fig. 91) soit décrit dans

le plan PRQ l'Arc nuz, concentrique à l'Arc RQt, & soient imaginés les plans Ptd, Pme, infiniment proches l'un de l'autre. Cela posé,

Soit tc ou em ou Qq ou $Rr = ds$; tn ou um ou it ou $DQ = dt$; cn ou eu ou id ou $Dq = dz$; & le petit Arc $tm = dr$: soit encore f la résistance absolue que feroit le Fluide, à une surface circulaire $\frac{ca}{2}$, qui frapperoit ce Fluide avec une vitesse donnée g. Si on suppose que u soit la vitesse du Sphéroïde, & que la résistance soit comme une fonction quelconque (φu) de la vitesse, on trouvera, que l'effort absolu des particules du Fluide, contre le petit parallélogramme $itmu$, qu'elles frappent perpendiculairement est à l'effort f, comme $\varphi u . itmu$ à $\varphi g \times \frac{ca}{2}$. Donc cet effort absolu est $\frac{f\varphi u . 2dr . dt}{\varphi g . ca}$ (à cause que $itmu = it \times tm = dr \times dt$.

3°. Mais l'effort qui résulte de ce dernier, contre la petite surface $tdem$ (Fig. 92) suivant mC perpendiculaire à em dans le plan Pme est $\frac{f\varphi u . 2dr . dt . mu}{\varphi g . ca . me} = \frac{f\varphi u . 2dt^2 dr}{\varphi g . cads}$.

4°. L'effort suivant MC ou CK, dans le plan Pme se décompose en deux autres, l'un suivant l'Axe CN; & cet effort est $\frac{f\varphi u . 2dt^3 dr}{\varphi g . cads^2}$; l'autre suivant CL, menée perpendiculairement à l'Axe dans le plan Pme, & qui est $\frac{f\varphi u . 2dt^2 drdz}{\varphi g . cads^2}$.

5°. Enfin

5°. Enfin l'effort ſuivant CL (Fig. 93) ſe décompoſe encore en deux autres, l'un ſuivant CF perpendiculaire au plan PQq, l'autre ſuivant Cb perpendiculaire à l'Axe PC dans ce même plan PQq, & ce dernier effort eſt $\frac{f\varphi u \,.\, 2dt^2 dr dz \,.\, Cb}{\varphi g \,.\, cads^2 \,.\, CL}$. Or en menant par le point ε la ligne εV perpendiculaire à la ligne PQ, & qui coupe la ligne Pm en k, on verra que les triangles PVk, CLb ſont ſemblables. Donc $\frac{Cb}{CL} = \frac{PV}{Pk}$. Cela ſuppoſé,

6°. On nommera les données PV, h; $V\varepsilon$, m; & l'indéterminée Vk, ζ; & l'on aura $k\lambda = d\zeta$; l'Arc $\lambda\beta = \frac{hd\zeta}{\sqrt{[hh+\zeta\zeta]}}$; par conſéquent l'Arc εm $(dr) = \frac{hd\zeta\sqrt{[hh+mm]}}{hh+\zeta\zeta}$: on a de plus $\frac{PV}{Pk} = \frac{h}{\sqrt{[hh+\zeta\zeta]}}$. Mettant ces valeurs dans l'expreſſion précedente *n.* 5. on aura l'effort ſuivant $Cb = \frac{f\varphi u \,.\, 2dt^2 dz \,.\, hhd\zeta\sqrt{[hh+mm]}}{\varphi g \,.\, cads^2 \,.\, (hh+\zeta\zeta)^{\frac{3}{2}}}$.

7°. Je prends maintenant l'intégrale de cette derniére quantité, en regardant ſeulement ζ comme variable (car toutes les autres quantités ſont en effet conſtantes) & j'ai $\frac{f\varphi u \,.\, 2dt^2 dz \,.\, \zeta\sqrt{[hh+mm]}}{\varphi g \,.\, cads^2 \,.\, \sqrt{[hh+\zeta\zeta]}}$, pour l'expreſſion de l'effort total ſuivant Cb, réſultant de l'impreſſion du Fluide contre la Zone partielle $Qm\varepsilon q$.

8°. Si donc on fait Vk $(\zeta) = V\varepsilon$ (m), on aura l'effort ſuivant Cb pour la Zone $Q\varepsilon cq$, égal à

$\frac{f\varphi u.2d\varepsilon^2 dz.m}{\varphi g.cads^2}$; & l'effort ſuivant *Cb* pour la Zone entiére

$R\varepsilon cr$, égal à $\frac{f\varphi u.2\varepsilon V.2(DQ)^2.Dq}{\varphi g.ca.Qq^2}$.

Remarque.

297. 1°. L'effort ſuivant *CF* dont nous n'avons point fait mention, eſt détruit par un effort contraire & égal, provenant de la réſiſtance, faite à la Zone *RQqr*; de-ſorte que tout l'effort du Fluide contre la Zone $R\varepsilon cr$, ſe réduit à deux; l'un ſuivant l'Axe *CN*, l'autre ſuivant *Cb* perpendiculaire à ce même Axe, dans le plan *PQq* qui partage la Zone en deux également.

2°. Si on cherche les efforts provenans de la réſiſtance que fait le Fluide au reſte de la Zone $R\varepsilon cr$, c'eſt-à-dire, à ſon complément à la Zone circulaire entiére, on réduira de même ces efforts à deux; l'un ſuivant *CN* dans la direction de l'Axe, l'autre ſuivant *Cx* directement oppoſée à *Cb*, & ce dernier effort doit être égal à l'effort ſuivant *Cb*, ſi la Zone circulaire entiére eſt dans un ſeul Fluide. Car il eſt viſible que dans ce cas, l'effort provenant de la réſiſtance faite à la Zone circulaire entiére, ſe réduit à un ſeul effort dans la direction de l'Axe *CN*, ce qui ne peut ſe faire, à moins que les efforts ſuivant *Cb* & *Cx* ne ſoient égaux. Donc &c.

Problême VII.

298. *Trouver la réſiſtance que ſouffre un ſegment de Sphére* Eam, (Fig. 94) *frappé par un Fluide ſuivant une direc-*

tion quelconque QK, qk, *& l'effort qui en résulte contre le centre* C, *tant suivant* Cb *perpendiculaire à* CA, *que l'on suppose parallèle à* QK, *que suivant* CN *dans la direction même de la ligne* CA, *qu'on peut prendre, si l'on veut, pour l'Axe de la Sphére.*

I.

Nous commencerons par chercher l'effort suivant Cb (Fig. 89). Or nous avons trouvé (*art.* 296. *n.* 8.) que l'élément de cet effort est $\frac{f\varphi u . 2tV . 2(DQ)^2 . Dq}{\varphi g . ca . Qq^2}$. Soit donc (Fig. 94) CA, a, CG, e, CO, m, CP, x, l'expression de cet effort, sera $\frac{-4f\varphi u . xxdx}{ca\varphi g . aa} \sqrt{[OM^2 - OV^2]}$, où j'ai mis $-dx$, parce que CP (x) croissant, cet effort diminue. Or les triangles semblables CPL, CAG, donnent $CL = \frac{ax}{e}$: donc $OL = \frac{ax}{e} - m$. De plus, AG $(\sqrt{[aa-ee]}) : CG\,(e) :: OL\,(\frac{ax}{e} - m) : OV = \frac{ax-em}{\sqrt{[aa-ee]}}$. On aura donc l'expression analytique de l'élément de l'effort suivant Cb, dont l'intégrale, en supposant $x - \frac{em}{a} = z$, se trouvera

$$\frac{4f\varphi u . mmee}{caa\varphi g . aa\sqrt{[aa-ee]}} \int -dz\sqrt{[aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}-zz]} +$$

$$\frac{f\varphi u}{taa\varphi g\sqrt{[aa-ee]}} \times z . (aa-ee-mm+\frac{mmee}{aa}-zz)^{\frac{3}{2}} +$$

$\frac{4f\varphi u . 2em}{caa\varphi g\surd[aa-ee].3a} \times (aa - ee - mm + \frac{mmee}{aa} - zz)^{\frac{3}{2}} +$

$\frac{f\varphi u}{caa\varphi g\surd[aa - ee]} \times (aa - ee - mm + \frac{mmee}{aa}) \times$

$\int - dz \surd[aa - ee - mm + \frac{mmee}{aa} - zz]$.

Pour conſtruire maintenant cette intégrale, je remarque 1°. que $CR = \frac{em}{a}$: donc $x - \frac{em}{a} = CP - CR = RP$: De plus, CA (a) : AG $(\surd[aa - ee])$: : OM $(\surd[aa - mm])$: $RF = \surd[aa - mm - ee + \frac{mmee}{aa}]$.

Soit donc du diamétre $FS = 2RF$, (Fig. 95) décrit le demi-Cercle FQS, l'intégrale ci-deſſus, en prenant RP, (Figure 95) = à RP (Figure 94), ſera

(K) .... $\frac{4f\varphi u . CR^2}{caa\varphi g . AG} \times$ ſegm. $PQF + \frac{4f\varphi u . 2CR}{caa\varphi g . 3AG} \times$

$PQ^3 + \frac{f\varphi u}{caa\varphi g} (\frac{RP \times PQ^3 + RF^2 \times PQF}{AG})$. Lorſque le point P tombe en F, cette intégrale devient zero, ainſi elle eſt complette, & il n'y a rien à lui ajouter.

Donc l'effort ſuivant Cb réſultant de la réſiſtance faite au ſegment entier EaM, eſt $\frac{4f\varphi u . CR^2}{caa\varphi g . AG} \times FQS + \frac{4f\varphi u . FR^2}{caa\varphi g . 4AG} \times FQS$. Or le demi-Cercle FQS eſt au demi-Cercle $\frac{ca}{4}$ :: $RF^2 . aa$. donc $FQS = \frac{ca . RF^2}{4aa}$, & la quantité précedente ſe réduit à $\frac{f\varphi u . RF^2 . (RF^2 + 4CR^2)}{a^3\varphi g . 4AG}$, qui ex-

prime l'effort fuivant Cb réfultant de la réfiftance faite au fegment entier EaM.

II.

A l'égard de l'effort fuivant CN (Fig. 89), il eft clair (*art.* 296. *n.* 4.) que fon élément eft $\frac{f\varphi u \,.\, 2DQ^3}{ca\varphi g \,.\, Qq^2} \times 2 \,.\, \text{arc} \,.\, Qt$. Cette quantité peut paroître d'abord difficile à exprimer analytiquement. Car l'expreffion de l'Arc Qt doit y entrer : or cet Arc n'eft exprimable que par une quantité fous le figne $\int$, & comme le rayon PQ & le Sinus Vt font variables l'un & l'autre, cette expreffion ne pourroit manquer de rendre la différentielle fort compliquée.

Pour avoir donc une expreffion dans laquelle il n'entre fous le figne $\int$ qu'une feule variable, on prendra une indéterminée s, telle que $\frac{s}{a} = \frac{Vt}{PQ}$, & l'Arc Qt fera égal à $\frac{PQ}{a} \times \int \frac{ads}{\sqrt{[aa - ss]}}$, ou, à caufe que $\frac{s}{a}$ eft égale à $\frac{\sqrt{[a^4 - aamm - aaee - aaxx + 2aemx]}}{\sqrt{[(aa - ee) \,.\, (aa - xx)]}}$ que je fuppofe pour abreger $= \frac{\Gamma x}{a}$, on aura l'Arc $Qt = \frac{\sqrt{[aa - xx]}}{a} \times \int \frac{ad(\Gamma x)}{\sqrt{[aa - (\Gamma x)^2]}}$. L'élément cherché, fera donc $\frac{-4f\varphi u \,.\, x^3 dx}{ca\varphi g \,.\, a^3} \int \frac{ad(\Gamma x)}{\sqrt{[a^2 - (\Gamma x)^2]}}$, dont l'intégrale exprimera la réfiftance totale fuivant CN.

SCOLIE.

299. Lorsque le point E (Fig. 96 & 97) est de l'autre côté du point B par rapport au point A, alors, comme il n'y a que la portion BaM du segment, qui souffre de la résistance, on prendra FC (Fig. 97) = à FC (Fig. 96) & l'intégrale (K) (*article* 298.) exprimera la résistance totale, en mettant $-RC$ pour RP, CL pour PQ & FLC pour PQF.

Si l'Arc BM est presque un demi-Cercle, c'est-à-dire si les points b, M (Fig. 98) sont infiniment près l'un de l'autre, la ligne CF est infiniment petite. Donc l'effort suivant Cb exprimé par l'intégrale (K) devient alors infiniment petit.

PROBLÊME VIII.

300. *Trouver la courbe que décrit le centre* C (Fig. 80) *d'une Sphère sans pesanteur, qui passe obliquement d'un Fluide moins résistant dans un autre plus résistant, en supposant la résistance comme le quarré de la vitesse.*

La même construction & les mêmes raisonnemens étant faits que pour le cas du Cercle (*art.* 264.) on aura

$$\frac{[f - \mathrm{f}] . RF^2 \times (RF^2 + 4CR^2) \times Ci^2}{a^3 gg . 4AG} = m . oi.$$

Si on met dans cette Equation, au lieu de RF, CR, AG, leurs valeurs $\frac{dy\sqrt{[2ax - xx]}}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$, $\frac{adx - xdx}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; $\frac{ady}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; & $\frac{2pb}{m}$ au lieu de gg, on aura

$$(L)\ldots dy = h\,dx\,c^{\int(dx.[f-\mathfrak{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):2pba^4};$$
$$\sqrt{}\Big[aa-\frac{bh}{4}\int\frac{dx.[f-\mathfrak{f}].[2ax-xx]^{\frac{3}{2}}}{pba^4}\times c^{\int(dx.[f-\mathfrak{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4}\Big],$$

Equation de la premiére courbe décrite par le centre C.

Lorſque les points B, E, dont l'un monte & l'autre deſcend toujours, ſe ſont rencontrés, & que le point E a repaſſé au-de-là du point B, l'Equation de la courbe eſt alors (en faiſant $\frac{adx-xdx+dy\sqrt{[2ax-xx]}}{dy\sqrt{[2ax-xx]}}=\frac{t}{a}$, mettant pour ſimplifier les calculs, u pour $a-x$, zdx pour ady, & $z:(t-a)$ pour aq)

$$(M)\ldots\ldots\frac{-6pbc}{f-\mathfrak{f}}\times[(t-a).dq-qdt]=\frac{a^4q^3dq}{(aa+qq)^{\frac{7}{2}}}\times$$
$$\Big(\frac{[12.(t-a^2)+3a^2]\int dt\sqrt{[2at-tt]}}{t-a}+5.[aa-(t-a^2)]^{\frac{3}{2}}\Big).$$

Si on pouvoit ſéparer les indéterminées de cette Equation, on auroit, comme il eſt évident, la conſtruction de la courbe qu'on cherche.

Corollaire I.

301. Il ne faut que relire les *articles* 265. 266. 267. 268, pour voir que les propoſitions démontrées dans ces articles pour la réfraction du Cercle, ſont auſſi vrayes pour la réfraction de la Sphére. Il n'eſt pas moins évident que la courbe décrite par la Sphére, doit avoir le rayon de la développée infini à ſes deux extrêmités,

comme on l'a démontré pour le Cercle dans l'*art.* 269. De même tout ce qu'on a dit dans les *art.* 271. 272. 273. 275, sera également vrai pour la Sphére comme pour le Cercle, & ce seroit tomber dans des redites inutiles, que de vouloir démontrer de nouveau ces propositions.

Si on suppose, comme dans l'*art.* 276, que la différence de résistance des deux milieux soit infiniment petite, & qu'on conserve les mêmes noms, on trouvera $\frac{a.(2aq-qq)^{\frac{3}{2}}}{a^3.(a-q)} = \frac{[f-f]\times a}{15.pb}$. Donc *lorsque les deux milieux différent peu l'un de l'autre en résistance, & que la résistance dans chacun est comme le quarré de la vitesse, les Sinus d'incidence & de réfraction sont en raison constante.*

COROL. II.

302. Si on suppose, comme dans l'*article* 277, que h soit très-petite, on trouvera encore par la même voye qu'on l'a trouvé pour le Cercle dans cet *article* 277. que le rapport du Sinus d'incidence au Sinus de réfraction, est constant & égal à celui de 1 à $c^{n:a}$, en prenant c pour le nombre dont le Logarithme est l'unité, & $n:a$ pour ce que devient la quantité ....
$\int(dx.[f-f].[a-x]^2.[2ax-xx]):2pba^4$ dans l'Equation (L), lorsque $x=a$.

Au reste, on prouvera encore de même, que dans l'*article* 278, que *les Sinus d'incidence & de réfraction ne sont point en général en raison constante.* Car appellant $\frac{q}{a}$ ce

que

que devient la quantité ....

$$\int \frac{dx.[f-\mathrm{f}].[2ax-xx]^2}{pba^4}\, c^{(\int dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4}$$

dans l'Equation (L), on trouvera par les mêmes raisonnemens que dans l'*article* 277, que le rapport des Sinus, lorsque h est infiniment petite, est $c^{n:a} + h^2 \left(\frac{c^{n:a} q}{8a^3} - \frac{c^{3n:a}}{2aa} + \frac{c^{n:a}}{2aa}\right)$, & l'on réduira la question comme dans l'*article* 278, à prouver que q n'est pas égal à $4ac^{2n:a}$; ce qui se démontre en cette sorte : q est ce que devient la quantité ....

$$\int \frac{dx.[f-\mathrm{f}].[2ax-xx]^2}{pba^3}\, c^{\int(dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4},$$

lorsque $x = a$; mais cette quantité est égale à

$$\int \frac{dx.[f-\mathrm{f}].[2ax-xx]}{pba}\, c^{\int(dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4} - c^{\int(dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4} + 1.$$

Si on prend donc $\frac{\mathrm{q}}{a}$ pour ce que devient ....

$$\int \frac{dx.[f-\mathrm{f}].[2ax-xx]}{pba}\, c^{\int(dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2.[2ax-xx]):pba^4},$$

lorsque $x = a$: on aura $q = \mathrm{q} - ac^{2n:a} + a$. Il faut donc prouver que $\mathrm{q} - ac^{2n:a} + a$ n'est pas égal à $4ac^{2n:a} - 4a$; ou, ce qui est la même chose, que q n'est pas $= 5a$

$$(c^{2n:a} - 1) : \text{or} \int \frac{dx.[f-\mathrm{f}].[2ax-xx]}{pba} \times c^{\int(dx.[f-\mathrm{f}].[a-x]^2[2ax-xx]):pba^4} =$$

$$\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} \times$$

$$c^{[f-f].([a-x].[2ax-xx]^2 + \int aadx.[2ax-xx]):5pba^4} >$$

$$\int \frac{dx.[f-f].[2ax-xx]}{pba} c^{[f-f]\int dx.[2ax-xx]:5pba}.$$

Mais cette derniére quantité est égale à ....
$5(c^{[f-f]\int dx.[2ax-xx]:5pba} - 1)$ & lorsque $x = a$, elle devient $5(c^{2n:a} - 1)$, donc q $> 5a(c^{2n:a} - 1)$. Donc &c.

COROL. III.

303. On prouvera encore, comme dans l'*art.* 279, que dans les deux cas des articles précedens, où nous venons de faire voir que les Sinus sont en raison constante, les angles d'incidence & de réfraction sont réciproques. Mais on fera voir aussi, comme on l'a fait voir dans le même *art.* 279. qu'*en général, les angles d'incidence & de réfraction ne sont point réciproques.* Cela doit être à présent si facile, qu'il est inutile de nous y arrêter.

Il sera encore aisé de démontrer pour la Sphére, les mêmes propositions que nous avons démontrées pour le Cercle dans les *articles* 281. 282. 284. 285. &c. de ce Traité.

COROL. IV.

304. *Si la résistance n'est point comme le quarré de la vitesse, & que les deux milieux différent peu l'un de l'au-*

tre, les Sinus d'incidence & de réfraction ne sont point en raison constante.

On démontrera cette proposition par une Méthode précisément semblable à celle par laquelle on a démontré la proposition analogue (*article* 286.) : quoique j'en aye fait le calcul, je ne l'insérerai point ici parce qu'il est fort long, & que d'ailleurs il est fort naturel de penser que la proposition dont il s'agit ici est très-vraye, après celle que nous avons démontrée dans l'*article* 286.

COROL. V.

305. *Les angles d'incidence & de réfraction ne sont réciproques dans aucune hypothese de résistance.*

Pour démontrer cette proposition quand le mobile est une Sphére, & appliquer ici l'*article* 291, on observera d'abord qu'en appellant f la résistance faite au grand Cercle, la force suivant AC (Figure 99) résultante de la résistance faite à une portion aAM est $f \times (\frac{1}{2} - \frac{CP^4}{2CA^4})$, & que la force résultante de la résistance faite à la portion $EaMQ$ est, à un infin. petit du 3me ordre près, $\frac{f.(CP^4 - CP^4)}{2a^4}$; qu'enfin la force résultante de la résistance faite à la portion $eEQq$, est $\frac{f.CP^4}{2a^4}$.

Or comme CP & CP ne différent qu'infiniment peu l'un de l'autre, lorsque l'angle aCA est fort petit, comme on le suppose ici, la résistance sera (à un infiniment

petit du troiſiéme ordre près) $\frac{\mathrm{f}}{2} + [f - \mathrm{f}]\,(\frac{1}{2} - \frac{Cp^4}{2a^4}) =$ $\frac{\mathrm{f}}{2} + [f - \mathrm{f}]\,(\frac{2ax - xx}{aa} - \frac{(2ax - xx)^2}{2a^4})$. Du reſte, le procedé de la démonſtration ſera précifément le même que dans l'*article* 291 ; c'eſt pourquoi nous ne croyons pas qu'il ſoit néceſſaire de nous arrêter plus longtems là-deſſus.

Remarque.

306. Si le Cercle ou la Sphére entrent d'un Fluide dans un autre ſuivant une ligne perpendiculaire à la ſurface commune des deux Fluides, alors, comme ils ne décrivent point de courbe, l'unique Problême qu'on puiſſe ſe propoſer, eſt de chercher quelle ſeroit leur viteſſe dans un inſtant quelconque du tems de l'immerſion. Mais ce Problême eſt ſi aiſé à réſoudre, ſoit en ſuppoſant le Cercle & la Sphére ſans peſanteur, ſoit en les regardant comme peſans, & en ayant même égard à la peſanteur ſpécifique des Fluides, que nous ne croyons pas néceſſaire d'en donner ici la ſolution. Nous remarquerons ſeulement que le Problême ne ſeroit pas plus difficile, ſi au lieu de la Sphére ou du Cercle, on prenoit en général une figure quelconque compoſée de deux parties égales, ſemblables, & ſemblablement ſituées des deux côtés de leur Axe, laquelle s'enfonçât d'un Fluide dans un autre, perpendiculairement, & ſuivant la direction de ce même Axe.

SCOLIE GENERAL.

307. Au reste, nous finirons par remarquer, que tout ce qui a été dit jusqu'ici, n'est vrai que dans la supposition que ce soit un Cercle ou une Sphére qui s'enfonce. Car bien loin qu'on soit fondé à dire en général, par exemple, *que la réfraction doit se faire en s'éloignant de la perpendiculaire, si le passage se fait d'un milieu dans un autre plus résistant* : cette proposition se trouveroit fausse dans plusieurs cas. Tout dépend de la figure du Corps, & de la direction suivant laquelle il se présente pour entrer dans le nouveau milieu. Soit, par exemple, un parallélogramme rectangle $ABDC$, (Fig. 100) dont la diagonale AB soit paralléle à la surface EF des deux Fluides, & dont la direction GD passe par son angle D & par son centre G; je dis que ce parallélogramme, quoiqu'il entre obliquement suivant GD, ne doit souffrir aucune réfraction à son passage. Car dans l'instant que le parallélogramme touche en D la surface EF, l'action du Fluide sur la ligne BD est à son action sur la ligne AD, comme $BD \times \frac{DR^2}{DG^2}$ à $\frac{AD \times GR^2}{DG^2}$ :: $DR : GR$; d'où il s'ensuit, que ces deux actions étant regardées comme réunies aux points de milieu S, R, leur action conjointe doit être dirigée suivant DG. Donc au moins dans le premier instant de l'immersion, le parallélogramme ne sera point écarté de sa direction. Mais dans l'instant suivant qu'il est enfoncé de la partie MDL, il est clair par une raison semblable

à la précedente, que la force résultante de l'action du second Fluide, contre les lignes MD, DL, & la résultante de l'action du premier Fluide contre les lignes LB, MA, doit être dirigée suivant la même ligne DG. Donc &c.

COROLLAIRE GENERAL.

308. Les loix de la réfraction des Corps solides de figure circulaire ou sphérique, sont donc, comme on l'a démontré dans ce Chapitre, entiérement différentes des loix de la réfraction de la lumiére que l'Expérience nous a apprises. Or comme on ne sauroit presque douter que les Corpuscules lumineux ne soient de figure sphérique, nous croyons pouvoir conclure, que de toutes les explications qu'on a données jusqu'à présent de la réfraction de la lumiére, dans le systême de l'émission des Corpuscules, il n'y a de recevable que celle de M. *Newton*, qui fait dépendre la réfraction de la force attractive du milieu: encore cette explication n'aura-t'elle lieu qu'autant qu'on ne substituera pas à cette force attractive l'impulsion d'un Fluide invisible. Car la démonstration de M. *Newton*, qu'on peut lire, Sect. XII. du premier Livre de ses Principes, suppose formellement, que la vitesse du Corpuscule ne soit altérée que dans le sens perpendiculaire à la surface, & non dans le sens paralléle. Or si la force qui agit perpendiculairement à la surface provenoit d'un Fluide, ce Fluide résisteroit aussi dans le sens paralléle, & la vitesse en ce sens ne pourroit plus être cen-

ſée conſtante, ce qui dérangeroit entiérement la démonſtration de M. *Newton*.

Barrow dans ſes Leçons optiques Lec. 1. a donné d'après le P. *Maignan* Minime, une explication de la réfraction de la lumiére aſſez ingénieuſe. Mais outre que cette explication ſuppoſe les rayons de lumiére de figure Priſmatique, ce qui me paroît difficile à croire, j'eſpere démontrer en quoi cet Auteur s'eſt trompé, lorſque je parlerai de la réfraction des Corps de figure quelconque.

SECTION III.

Remarques ſur le Mémoire de M. de Mairan, *qui a pour titre :* Recherches Phyſico-Mathématiques ſur la réflexion des Corps.

309. M. *de Mairan* a donné dans les *Mém. de l'Académie de* 1723. (*p.* 343 *juſqu'à* 386) un Mémoire ſur la réfraction, où il traite cette matiére par des Principes bien différens de ceux que je viens d'établir : auſſi ſuis-je obligé d'avouer qu'il n'y a preſque aucune propoſition eſſentielle ſur laquelle je ſois d'accord avec lui : j'ai donc crû devoir me juſtifier ici ſur la différence de nos Principes, en expoſant les difficultés dont la Théorie de M. *de Mairan* me paroît ſuſceptible.

1°. L'idée générale de M. *de Mairan*, comme il paroît par les premiéres lignes de ſon Mémoire, a été d'expliquer la réfraction par les mêmes Principes que la réflexion des Corps pouſſés contre un plan mobile. Cette

idée, qui eſt très-ingénieuſe, eſt fort analogue à celle de *Deſcartes*, qui explique la réfraction d'une maniére à peu près ſemblable, ſi ce n'eſt qu'au lieu du plan mobile il ſuppoſe une toile tendue. * Mais malgré une ſi grande autorité, il me ſemble qu'une pareille idée ne peut ſervir à expliquer la réfraction des Corps, parce que la réſiſtance du Fluide dans lequel le mobile entre, ne ſe fait pas dans le ſeul ſens de la perpendiculaire à la ſurface du Fluide, comme il arrive lorſqu'un Corps choque un plan mobile.

2°. Auſſi cette idée, ſi elle étoit ſuivie, conduiroit-t'elle à une Théorie de la réfraction fort différente de celle que M. *de Mairan* prétend établir. Car nommant m, la maſſe du Corps choquant, μ celle du Corps choqué, u la viteſſe du Corps avant le choc, a, le Sinus total, & x le Sinus d'incidence; on trouveroit par un calcul fort ſimple, que le Sinus de réfraction devroit être $\frac{(m+\mu).ux}{u\sqrt{[(m+\mu)^2.xx+mm(aa-xx)]}}$; d'où l'on voit que les Sinus ne ſeroient point en raiſon conſtante, & que la viteſſe plus ou moins grande du mobile ne changeroit rien à ſa réfraction: deux propoſitions fort contraires à celles que M. *de Mairan* a tâché d'établir.

3°. Auſſi M. *de Mairan* ſemble-t'il avoir reconnu lui-même l'inſuffiſance de ce Principe du plan mobile, puiſque dans l'*art.* LIII. de ſon Mémoire, *examinant cette matiére plus immédiatement* (ce ſont ſes termes) & cherchant

* Voyez la Dioptrique de *Deſcartes*.

chant ce qui arrive à une Sphére qui passe d'un milieu dans un autre, il a égard non-seulement à la résistance dans le sens perpendiculaire à la surface, mais aussi à la résistance dans le sens paralléle à cette même surface.

4°. Quoique cette nouvelle maniére d'expliquer la réfraction paroisse beaucoup plus naturelle & plus plausible que la premiére, j'ai cependant des raisons très-fortes de douter qu'elle puisse conduire à une Théorie sûre & exacte. Pour le faire voir, j'observerai d'abord qu'une Sphére qui se meut dans un seul & même milieu, doit y décrire une ligne droite. Cependant si on décomposoit sa vitesse à chaque instant en deux autres dont les directions fussent de position donnée, on trouveroit que la Sphére ne pourroit décrire une ligne droite que dans un seul cas; savoir dans celui où la diminution que recevroit à chaque instant l'une & l'autre de ces vitesses, seroit même en raison que la vitesse, ce qui ne peut arriver que dans une seule hypothese de résistance. La Méthode de décomposition est donc fautive pour le cas de l'enfoncement total: par conséquent elle doit l'être nécessairement pour le cas de l'enfoncement successif.

5°. Mais pour démontrer plus directement la proposition dont il s'agit, & faire voir que la Méthode de décomposition n'est exacte en aucun cas, soit *CA* (Fig. 80) la direction de la Sphére, ou (pour faciliter le calcul) du Cercle *DNA* dans un instant quelconque où l'enfoncement est *Oa*, & supposons (pour faciliter encore le calcul) que le Cercle passe du vuide dans un Fluide;

la viteſſe ſuivant Ca ſera $\frac{u \cdot CG}{CA}$, & la viteſſe ſuivant OM ſera $\frac{u \cdot GA}{CA}$; l'effort ſuivant CD réſultant de la réſiſtance dans le ſens perpendiculaire ſera (*art.* 259.) $2f\varphi(\frac{u \cdot CG}{CA}) \times \frac{3CA^2 \cdot OM - OM^3}{3CA^3 \cdot \varphi g}$; l'effort ſuivant CD réſultant de la réſiſtance dans le ſens MO, eſt $f\varphi(\frac{u \cdot GA}{CA}) \times \frac{OM^3}{3CA^3 \cdot \varphi g}$; & l'effort ſuivant CH réſultant de cette même réſiſtance, eſt $f\varphi(\frac{u \cdot GA}{CA}) \times \frac{2CA^3 - 3CG \cdot CA^2 + CG^3}{3CA^3 \cdot \varphi g}$. Donc l'effort ſuivant Cb devroit être, en ſuivant les Principes de M. *de Mairan*, $\frac{f}{\varphi g} \times [\varphi(\frac{u \cdot CG}{CA}) \frac{6OM \cdot CA^2 - 2OM^3}{3CA^3} + \varphi(\frac{u \cdot GA}{CA}) \cdot \frac{OM^3}{3CA^3}] \times \frac{GA}{CA} + \frac{f}{\varphi g} \times \varphi(\frac{u \cdot GA}{CA}) \times \frac{2CA^3 - 3CG \cdot CA^2 + CG^3}{3CA^3} \times \frac{CG}{CA}$. Ce qui eſt fort différent de l'expreſſion $\frac{f\varphi u \cdot (CF^3 - Ce^3)}{\varphi g \cdot 3CA^3}$ que nous avons trouvée ci-deſſus (*art.* 264.) pour l'effort ſuivant Cb, & que nous avons déduite, ce me ſemble, des Principes fort clairs.

Il ſeroit trop long d'examiner ici *à priori*, pourquoi la Méthode de décompoſition eſt fautive dans le cas de la réſiſtance des Fluides. Voyez la *Manœuvre des vaiſſeaux de M.* Bernoulli, *pag.* 152. *& ſuiv.*

6°. En accordant même à M. *de Mairan* le Principe de décompoſition dont il ſe ſert, il me ſemble qu'il ne devroit pas en conclure, comme il le fait, que quand

une Sphére paſſe d'un milieu dans un autre plus réſiſtant, *la courbe qu'elle décrit doit être convexe vers la perpendiculaire* C*a*. J'ai démontré à la vérité cette propoſition dans les *art.* 264. & 281 : auſſi je ne prétends pas en conteſter la vérité, mais ſeulement expoſer les difficultés qu'il me ſemble qu'on pourroit oppoſer à la preuve alléguée par M. *de Mairan.* Pour cela je me repréſente le mobile dans l'inſtant préciſément qu'il touche la ſurface du nouveau milieu, & décompoſant alors, ſuivant la Méthode de M. *de Mairan*, la viteſſe du mobile en deux autres, l'une perpendiculaire & l'autre paralléle à la réſiſtance du Fluide, je vois que ſi on appelle u la premiére & v la ſeconde de ces deux viteſſes, les réſiſtances correſpondantes ſeront alors comme u^n à v^n, en ſuppoſant la réſiſtance comme une puiſſance quelconque de la viteſſe; donc ſi $u:v > u^n:v^n$ (c'eſt-à-dire ſi $u > v$ & $n > 1$, ou ſi $u < v$ & $n < 1$) la viteſſe paralléle ſera plus retardée que la viteſſe perpendiculaire. Mais lorſque le Cercle eſt enfoncé d'une quantité infiniment petite, le rapport des réſiſtances demeure le même (à un infiniment petit près) que quand le Cercle touche le nouveau milieu: il réſulte donc des Principes de M. *de Mairan*, que ſi $u > v$ & $n > 1$, ou ſi $u < v$ & $n < 1$, la courbe doit être concave vers la perpendiculaire, au moins dans ſon origine.

7°. Selon M. *de Mairan*, la mobile ne doit ceſſer de décrire la courbe que quand il eſt enfoncé tout-à-fait: de plus cette courbe, ſelon lui, va toujours en diminuant de courbure: ces deux propoſitions ſont encore contraires l'une

& l'autre à ce que j'ai avancé ci-dessus, (*art.* 268. *&* 269), & que je crois avoir prouvé d'une maniére assez simple.

8°. Comme le but principal de M. *de Mairan* a été d'expliquer la réfraction de la lumiére par les mêmes Principes que la réfraction des Corps solides, il a cherché à démontrer que dans ce dernier cas les Sinus d'incidence & de réfraction sont en raison constante. J'ai tâché de faire voir dans les *art.* 278. *&* 287. qu'il n'y a aucune hypothese sur la résistance où le rapport des Sinus soit constant, & je ne vois pas ce qu'on peut opposer à mes démonstrations : il me paroît, au contraire, que la preuve de M. *de Mairan* est susceptible de beaucoup de difficultés. Il cite d'abord un endroit de son Mémoire, où il prétend avoir prouvé que les forces avant & après l'immersion, sont réciproquement comme les Sinus. Cette proposition est vraye dans le cas du plan mobile ; mais peut-elle s'appliquer à la réfraction, après ce que nous avons dit dans le *n.* 1. *&* 2. de ces Remarques ? De plus, en accordant même que les forces sont comme les Sinus, comment prouvera-t'on que les Sinus sont en raison constante ? M. *de Mairan* prétend que les forces sont en raison inverse des résistances, & que les résistances sont en raison constante : il me semble qu'aucune de ces deux propositions ne présente rien de net à l'esprit.

En premier lieu, si par le mot de *résistance*, M. *de Mairan* entend *l'intensité de la résistance* des deux Fluides, il est bien vrai que les résistances seront en raison const-

tante : mais qui nous assure alors que les forces sont entr'elles en raison inverse des résistances ? Tout ce qu'on peut prétendre en ce cas, c'est que la vitesse après la réfraction sera d'autant moindre par rapport à la vitesse après la réfraction, que la résistance du nouveau milieu sera plus grande par rapport à celle du premier. Mais ces vitesses seront-elles pour cela en raison inverse des résistances ? D'ailleurs, si cette proposition étoit vraye, il s'ensuivroit que (dans les Principes de M. *de Mairan*) toutes choses d'ailleurs égales, une vitesse plus ou moins grande avant la réfraction n'apporteroit dans la réfraction aucun changement. Ce que M. *de Mairan* est bien éloigné de penser.

En second lieu, si par le mot de *résistance*, M. *de Mairan* entend autre chose que *l'intensité de la résistance*, je crois qu'en ce cas il est très-difficile de prouver, & que les forces sont entr'elles en raison inverse des résistances, & que les résistances sont en raison constante.

9°. M. *de Mairan* prétend qu'en général, un Corps de figure quelconque doit s'écarter de la perpendiculaire quand il passe dans un milieu plus résistant que celui d'où il vient, & au contraire. J'ai démontré à la vérité dans l'*article* 264. que cette proposition est vraye si le mobile est un Cercle ou une Sphére ; mais je crois avoir prouvé aussi dans l'*art.* 307. & le prouverai encore dans la suite, que cette proposition n'est point vraye en général, & que tout dépend ici de la figure du Corps & de sa direction.

10°. Je crois que ces difficultés, jointes à celles que M. *Clairaut* a déja proposées contre la Théorie de M. *de Mairan* dans les *Mém. de l'Académie de* 1739, pourront faire naître aux Lecteurs quelques scrupules sur les Principes du Mémoire de 1723. Mais je ne finirai point ces Remarques, sans dire aussi un mot de quelques articles d'un Mémoire de M. *de Mairan*, imprimé en 1738. il prétend *art.* LXXIV. *que la différente masse ou grosseur des Globules de la lumiére, indépendamment de toute autre circonstance, ne sauroit produire les différens degrés de réfrangibilité que nous remarquons dans les parties qui composent un de ses rayons sensibles.* Je ne crois pas cependant, que M. *de Mairan* puisse avancer cette proposition dans ses Principes. Car, selon lui, les loix de la réfraction de la lumiére doivent être les mêmes que celles de la réfraction des Corps solides: or il est aisé de conclure de nos formules de l'*art.* 265. que la différence dans les masses, toutes choses d'ailleurs égales, doit changer la réfraction.

Dans l'*art.* LXXXVII. de ce même Mémoire, M. *de Mairan* attribue la différente réfrangibilité à la différence des vitesses, & prétend que la réfraction est d'autant moindre que la vitesse est plus grande, toutes choses égales d'ailleurs; je renvoye sur cela le Lecteur aux *articles* 265. *&* 285. de cet Ouvrage, dans lesquels j'ai fait voir, si je ne me trompe, qu'il a des cas où la vitesse plus ou moins grande, ne change rien à la réfraction, qu'il y en a d'autres, où la réfraction est d'autant plus grande que la vitesse initiale est plus grande, & au contraire.

CHAPITRE III.

Du mouvement des Corps dans des milieux d'une densité uniforme ou variable.

310. J'AI démontré dans le Chapitre préced. (*art.* 307.) que si un parallélogramme rectangle entroit obliquement d'un Fluide dans un autre, suivant la direction d'une de ses diagonales, & de maniére que l'autre diagonale fût paralléle à la surface commune des deux Fluides, ce parallélogramme ne souffriroit aucune réfraction dans son passage. Ce Theorême peut se déduire aisément d'une proposition du *Traité de la Manœuvre des vaisseaux* de M. *Bernoulli*, dans laquelle cet Illustre Geométre prouve qu'un Navire qui auroit la figure d'un rectangle, étant mû dans un Fluide suivant une de ses diagonales, l'impulsion du vent, nécessaire pour contrebalancer la résistance du Fluide, devroit avoir cette même diagonale pour direction. Le même Auteur fait voir encore, & c'est une proposition aisée à démontrer, que si ce Navire étoit mû suivant toute autre ligne que sa diagonale, ou une paralléle à l'un de ses côtés, l'action du vent devroit avoir une direction différente de celle du Navire. Il me fut aisé de conclure après avoir lû ce Theorême, qu'un rectangle, mû librement dans un Fluide en repos, y décriroit une ligne courbe. Je remarquai ensuite que la plûpart des Auteurs qui ont traité du mouvement

des Corps dans des milieux résistans, n'ont jamais regardé les Corps mûs que comme des points : d'où il résulte que la Théorie de ces Auteurs ne peut guère s'appliquer en général qu'aux Corps sphériques, & qu'elle est par conséquent fort limitée. A l'égard des recherches qu'on a faites jusqu'à présent sur le mouvement des Corps dans des milieux d'une densité variable, non-seulement on a toujours considéré le mobile comme un point, mais il a été nécessaire de le considérer comme tel. Aussi M. *Newton* a-t'il soin d'avertir, * que dans tout ce qu'il a donné sur ce sujet, il a supposé que le mobile étoit assez petit pour pouvoir être regardé à chaque instant, comme étant dans un milieu de densité uniforme.

Il est vrai que si dans les Problêmes qu'on peut se proposer sur ce sujet, on veut avoir égard à la figure du Corps mû, on s'apperçoit sans peine que cette recherche suppose non-seulement des Principes peu connus, mais qu'elle demande encore des calculs longs & pénibles. J'ai donc cru qu'on seroit bien-aise de voir ici ces différentes matiéres traitées plus à fond, qu'elles ne l'ont été jusqu'à présent. Je déterminerai d'abord la courbe que doit décrire un parallélogramme rectangle mû suivant une direction quelconque dans un Fluide en repos, & je déduirai de la solution de ce Problême quelques Corollaires assez curieux. Je chercherai ensuite la courbe que doit décrire un Corps de figure circulaire ou sphérique, lorsqu'il se meut dans un milieu de densité variable.

* Scol. Prop. 16. liv. II. Princ. Math.

J'examinerai

J'examinerai après cela ce qui doit arriver à un Corps mû dans un Fluide qu'on suppose aussi être lui-même en mouvement. Cette considération ajoute aux Problêmes de nouvelles difficultés, & donne lieu à quelques observations assez importantes. Enfin, je donnerai les loix du mouvement d'un Corps de figure quelconque dans un Fluide, & je terminerai ce Chapitre par des observations sur quelques Problêmes, qui me paroissent n'avoir pas été bien résolus jusqu'ici.

§. I.

Du mouvement d'un parallélogramme dans un Fluide en repos de densité uniforme.

PROBLÊME I.

311. *Trouver la courbe que décrit un parallélogramme rectangle, sans pesanteur, poussé suivant une direction quelconque dans un Fluide en repos.*

Soit $BFGH$ (Fig. 101) le parallélogramme proposé, C le point d'intersection de ses deux diagonales, que nous appellerons son *centre*, CE la direction du centre dans un instant quelconque; soient menées les lignes FO, BO, HO, paralléles à CE, & du centre C soient abaissées les perpendiculaires CA, CD, aux côtés HB, BF; que f représente la résistance que feroit le Fluide à une ligne donnée comme BD, s'il venoit la frapper perpendiculairement avec une vitesse donnée g; que u soit la vitesse du centre C suivant CE; qu'enfin φu, φg, expriment les

fonctions des vitesses u, & g suivant lesquelles on suppose que la résistance se fait.

L'impression du Fluide sur le côté FB, considérée, comme réunie au point D, & agissant suivant DC, sera $\frac{f\varphi u . 2AE^2}{\varphi g . CE^2}$. De même la résistance du Fluide au côté HB, considérée comme réunie au point A, & agissant suivant AC, sera $\frac{f\varphi u . HB . AC}{\varphi g . CE^2}$.

L'action du Fluide suivant DC ou CM se décompose en deux autres; l'une suivant CN, directement opposée à CE, & cet effort s'exprime par $\frac{f\varphi u . 2AE^3}{\varphi g . CE^3}$; l'autre effort qui agit suivant CT perpendiculaire à CE, s'exprime par $\frac{f\varphi u . 2AE^2 . CA}{\varphi g . CE^3}$.

De même l'action du Fluide suivant AC ou CS se décompose en deux autres; l'une suivant CP, & qui est $\frac{f\varphi u . HB . AC^2}{\varphi g . CE^3}$; l'autre suivant CR, & qui s'exprime par $\frac{f\varphi u . HB . AC . AE}{\varphi g . CE^3}$.

Donc la résistance du Fluide suivant EC, laquelle résistance est égale à la somme des efforts suivant CN & CP, sera $\frac{f\varphi u . (HB . AC^2 + 2AE^3)}{\varphi g . CE^3}$.

De même la force résultante de l'impression du Fluide, & qui tend à pousser le centre C perpendiculaire-

ment à CE, laquelle force eſt égale à la différence des efforts ſuivant CT & CR, ſera $\frac{f\varphi u.(2AE^2.CA - HB.AC.AE)}{\varphi g.CE^2}$.

D'où il s'enſuit 1°. que ſi $HB = AE$ le centre C ne doit point décrire de courbe. 2°. Que ſi $2AE > HB$, comme on l'a ſuppoſé dans la Figure, la force ſuivant CT l'emportera ſur la force ſuivant CR, & que la courbe décrite par le centre C tournera ſa concavité vers la perpendiculaire CA. 3°. Enfin, que ſi $2AE > HB$, la force ſuivant CR ſera plus grande que la force ſuivant CT, & la courbe décrite par le point C ſera pour lors convexe du côté de CA.

Pour déterminer la nature de cette courbe, on nommera les lignes infiniment petites CV, dx, Vu; dy; d'où en ſuppoſant dx conſtante, on aura $ui = -ddy$ (à cauſe que la courbe eſt ici concave vers CA) & le petit Arc io décrit du centre C ſera $\frac{-dxddy}{\sqrt{[dx^2+dy^2]}}$. On nommera de plus les données CA, a, AB, b, & l'indéterminée AE, z, d'où l'on tirera $dy = \frac{zdx}{a}$, $-ddy = \frac{-dxdz}{a}$, $oi = \frac{-dxdz}{\sqrt{[aa+zz]}}$. Si l'on ſuppoſe maintenant que m exprime la maſſe du parallélogramme $BFGH$, on aura ces deux Equations

$$\frac{f\varphi u.(HB.AC^2+2AE^3)}{\varphi g.CE^3} \times Ci = -mudu,$$

$$\& \frac{f\varphi u.(2AE^2.CA - HB.CA.AE)}{\varphi g.CE^3} \times \frac{Ci^2}{uu} = m.oi,$$

c'eſt-à-dire $\frac{f\varphi u.(2baa+2z^3).dx}{\varphi g.a.(aa+zz)} = -mudu; \ldots\ldots (1)$

& $\frac{f\varphi u.(2zz-2bz).dx}{\varphi g.auu} = -mdz \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$

Si l'on tire de chacune de ces deux Equations une valeur de $\frac{f\varphi u.dx}{\varphi g}$, on aura en égalant ces deux valeurs, une Equation qu'on pourra mettre ſous la forme ſuivante : $\frac{du}{u} = \frac{zdz}{aa-zz} - \frac{dz}{z} + \frac{dz}{z-b}$: équation dont chaque membre eſt une différentielle Logarithmique. Suppoſant donc que la viteſſe donnée g repréſente la viteſſe initiale, & qu'à l'origine de la courbe z ſoit égale à h, on aura $u = \frac{g\sqrt{[aa+zz]}.h.(z-b)}{\sqrt{[aa+hh]}.z.(h-b)}$.

On voit par-là que *la viteſſe* u *eſt toujours exprimable en termes finis, quelle que ſoit la Loi de la réſiſtance.*

Si on remet enſuite cette valeur de u dans l'Equation (2), on aura la valeur de dx en z & dz, & par conſéquent auſſi celle de dy $(\frac{zdx}{a})$ en z & dz. Donc *la courbe pourra toujours être conſtruite au moins par les quadratures, quelle que ſoit la fonction* φu *de la viteſſe, ſuivant laquelle la réſiſtance ſe faſſe.*

COROLLAIRE I.

312. L'Equation $u = \frac{g\sqrt{[aa+zz]}.(z-b).h}{\sqrt{[aa+hh]}.(h-b).z}$ fait voir

que u décroit continuellement jusqu'à ce que z devienne égal à b, & que quand $z = b$ la vitesse $u = 0$. D'où il s'ensuit que le *mouvement ne cesse que quand le centre* C *du parallélogramme a pour direction la diagonale même.* De plus, si on suppose que la résistance soit comme une puissance n de la vitesse, on aura $\varphi u = u^n$, $\varphi g = g^n$, & l'Equation $\frac{fdx}{\varphi g} = \frac{-mauudz}{\varphi u . 2zz - 2bz}$ se changera en

$$\frac{2fdx}{magg} = -dz\left(\frac{\sqrt{[aa+zz]}.b}{\sqrt{[aa+bb]}.(b-b)}\right)^{2-n}.\frac{(z-b)^{1-n}}{z^{1-n}}.$$ Or

comme la variable z a pour limites les quantités h & b, il est visible par cette dernière Equation, que si $n =$ ou > 2, x est infinie lorsque $z = b$.

Donc *la courbe aura un cours infini, si la résistance est, ou comme le quarré, ou comme une puissance plus grande que le quarré de la vitesse ; si la puissance est moindre que le quarré de la vitesse, la courbe n'aura qu'un cours fini.*

L'élément du tems est $\frac{dx\sqrt{[aa+zz]}}{au} = \frac{-mgdz}{2f} \times$

$$\left(\frac{b}{\sqrt{[aa+bb.(b-b)}}\right)^{1-n}.\frac{(\sqrt{[aa+zz]})^{1-n}}{z^{1-n}(z-b)^n}.$$ D'où l'on

voit que *le tems est infini, si* n $=$ *ou* > 1 *& fini, si* n < 1.

Donc *si* n $=$ *ou* > 2 *le cours de la courbe est infini, aussi-bien que le tems employé à la décrire ; si* n < 2 *mais* $>$ *ou* $= 1$, *le cours de la courbe est fini, & le tems employé à la parcourir est infini : enfin si* n < 1, *le cours de la courbe est fini aussi-bien que le tems employé à la parcourir.*

COROL. II.

313. Si la résistance est comme le quarré de la vitesse, on peut en ce cas construire la courbe, sans avoir besoin de connoître la vitesse à chaque point. Car l'Equation (2) deviendra alors $\frac{fdx}{gg} = \frac{-madz}{2zz-2bz}$: la quantité g peut représenter dans cette derniére Equation, ou la vitesse initiale, ou telle autre vitesse donnée qu'on voudra : si l'on regarde de plus cette vitesse g comme égale à celle que la masse m pourroit acquérir en parcourant un espace donné e, & étant continuellement poussée par une force constante p, qu'on peut, si on veut, supposer égale à la force f, on aura $gg = \frac{2pe}{m} = \frac{2fe}{m}$. Donc $dx = \frac{-eadz}{zz-bz}$ & $dy = \frac{-edz}{z-b}$, ce qui donne la construction suivante.

Soit fait $OA = a$, $AB = b$, $AE = h$, (Figure 102) & soit décrite sur l'asymptote BF la Logarithmique VEG dont la soutangente soit $\frac{ea}{b}$. Ayant pris sur la ligne BE un point quelconque P, on fera les lignes Ee & Pp égales à AB; on tirera ensuite les lignes PG, pu, eV, & HGK, ul, VL : ayant enfin pris $HI = Ll$, & mené Ik parallèle & égale à HK, je dis que le point k sera à la courbe cherchée.

Car nommant AP, z, on aura aussi $Bp = z$, puisque

(*construct.*) $Bp = AP$. Par la même raison $Be = AE = h$. Donc PG ou $AH = \frac{ea}{b} \log. \frac{h-b}{z-b}$; Ll ou $HI = \frac{ea}{b} \log. \frac{h}{z}$; HK ou $Ik = AH \times \frac{b}{a} = e \log. \frac{h-b}{z-b}$; donc $AI = x$, $Ik = y$. Donc &c.

Lorsque le point P tombe en B, x devient infinie, & prenant $BN = AB$, la ligne Ll ou son égale Kk devient Lm. D'où l'on voit que si on fait $AQ = Lm$, & que par le point Q on tire QR paralléle à AD, cette ligne QR sera asymptote de la courbe Ak.

Quelle que soit la vitesse initiale, pourvû que $\frac{a}{b}$ demeure constante, la courbe Ak sera la même. D'où il s'ensuit que la courbe AkM étant une fois tracée, il sera aisé de trouver la courbe décrite par le parallélogramme, quelle que soit la vitesse initiale, & quelque valeur qu'on donne à h. Car ayant trouvé sur la courbe AkM le point k, ou le rapport de dx à dy soit égal au rapport donné $\frac{a}{b}$; il est clair que kM sera la courbe cherchée.

COROL. III.

314. Dans le cas ou $n > 2$ & ou, comme on l'a vu ci-dessus (*article* 312.) le cours de la courbe est infini, il est aisé de prouver qu'elle n'a point d'asymptote comme dans le cas de $n = 2$. Pour cela il faut se rappeller qu'en

général, lorsque $x = \infty$ on a $z = b$, qu'ainsi lorsque $x = \infty$ le rapport de dy à dx est celui de b à a. Or cela posé, il est évident que la courbe aura une asymptote, si, lorsque $x = \infty$, $y - \frac{bx}{a}$ n'est qu'une quantité finie, & au contraire qu'elle n'en aura point, si $y - \frac{bx}{a}$ est une quantité infiniment grande. Pour voir clairement dans quels cas $y - \frac{bx}{a}$ est une quantité finie ou infinie, représentons-nous la courbe EM (Fig. 103) dont les coordonnées $AO = z$, $OM = x$, & dont l'Equation soit $\frac{2fdx}{magg} = - dz \left(\frac{\sqrt{[aa + zz]}.h}{\sqrt{[aa + bb]}.(h - b)}\right)^{2-n} . \frac{(z-b)^{1-n}}{z^{3-n}}$ qui est celle que nous avons trouvée ci-dessus (*art.* 312.) entre les x & les z. Comme l'on a déja vû que x croissant, z diminue, que $x = 0$ rend $z = h$, & que $x = \infty$ rend $z = b$, il est clair qu'en faisant $AE = h$, & $AB = b$, la courbe passera par le point E, & aura BQ pour asymptote. Or la valeur de dy qui est $\frac{zdx}{a}$ donne $y = \frac{ANME}{a} = \frac{ABNP + BPME}{a} = \frac{bx}{a} + \frac{BPME}{a}$. Il nous reste donc à voir, si lorsque $x = \infty$, l'espace $BPME$ est fini ou infini.

L'élément de cet espace est $dx.(z - b) = \frac{-maggdz}{2fz^{3-n}} \times \left(\frac{\sqrt{[aa+zz]}.b.(z-b)}{\sqrt{[aa+hh]}.h - b}\right)^{2-n}$. Il est aisé de voir que l'intégrale de ce second membre lorsque $z = b$, est une quantité

tité finie si $n = 2$, & infinie si $n > 2$. Donc *la courbe n'a une asymptote que dans le cas de* $n = 2$.

COROL. IV.

315. Si dans les Equations précedentes (*articles* 311 & 313), on suppose $b = 0$, c'est-à-dire que la largeur *HB* (Fig. 101) du rectangle soit infiniment petite ou nulle, il faudra effacer dans ces Equations tous les termes où se trouvera la quantité *b*.

Dans l'hypothese particuliére de la résistance comme le quarré de la vitesse, on aura $dx = \frac{-eadz}{zz}$ dont l'intégrale est $x = \frac{ea}{z} - \frac{ea}{b}$; donc $x + \frac{ea}{b} = \frac{edx}{dy}$, ce qui fait voir que *la courbe cherchée est une Logarithmique* dont la soutangente $= e$, & que l'origine de la courbe est distante de son asymptote d'une quantité égale à $\frac{ea}{b}$.

COROL. V.

316. Il est aisé de voir que tous les points de la ligne *FB* décrivent des Logarithmiques semblables & égales à la Logarithmique décrite par le point *D*, milieu de cette ligne. D'où il s'ensuit, que quelque grandeur qu'ait la ligne *FB*, elle décrira la même portion de la même Logarithmique, pourvû qu'on ne change point le rapport $\frac{a}{b}$ qui est celui de dx & dy à l'origi-

ne. Or de-là on peut conclure, qu'*une figure plane quelconque* FBN (Fig. 104) *sans pesanteur, étant mûe suivant une ligne* DA, *oblique au plan de cette surface, & dans un milieu résistant comme le quarré de la vitesse, cette surface plane* FBN *décrira une Logarithmique*. Car ayant imaginé le plan $ADFB$ perpendiculaire à FNB, & tiré tant de lignes qu'on voudra, paralléles à FB; il est clair par ce qu'on vient de dire, que tous les points de chacune de ces lignes décriront des Logarithmiques égales & semblables. Donc &c.

PROBLÊME II.

317. *Les mêmes choses étant posées que dans le Problême I. avec cette condition de plus, que le parallélogramme soit pesant, & que sa base* HB (Fig. 102) *soit située horizontalement, on demande la courbe qu'il doit décrire.*

Soit p l'effort absolu de la pesanteur, représenté par CL, & décomposé en deux autres efforts; l'un suivant CK perpendiculaire à CE, lequel est égal à $p \times \frac{CK}{CL} = \frac{p \times AE}{CE}$; l'autre suivant KL paralléle à CE, lequel s'exprime par $p \times \frac{KL}{CL} = \frac{p \times CA}{CE}$. Combinant chacun de ces deux efforts avec les deux qui résultent de la résistance du Fluide, on aura

$$p dx - \frac{f\varphi u}{\varphi g} \cdot \frac{(2baa + zz^3).dx}{a.(aa+zz)} = m u du,$$

& $\frac{pz:(aa+zz).dx}{aauu} + \frac{f\varphi u}{\varphi g} \times \frac{(2zz - 2bz).dx}{a.uu} = - m dz.$
Chassant de ces deux Equations l'indéterminée u, on aura celle de la courbe cherchée, en mettant pour z sa valeur $\frac{ady}{dx}$.

COROLLAIRE.

318. On voit aisément que la construction est très-facile dans le cas où $\varphi u = \varphi g$, c'est-à-dire lorsqu'on suppose la résistance constante. Car tirant alors de chacune des deux Equations une valeur de dx, & comparant ensemble ces deux valeurs, on aura une Equation dans laquelle les variables u & z seront d'elles-mêmes toutes séparées, & de laquelle on tirera la valeur de u en z. Mettant ensuite cette valeur de u dans l'une ou l'autre des deux premieres Equations, on aura la valeur de dx en z, dz, & en constantes. Si l'on suppose $\varphi u = u^n$ & $\varphi g = g^n$, la comparaison des deux valeurs de dx, conduit à une Equation qu'on peut mettre sous cette forme
$[\frac{p}{z} - \frac{fabu^n}{g^n(aa+zz)}].(\frac{du}{u} + \frac{dz}{z} - \frac{zdz}{aa+zz}) + \frac{fazu^n}{g^n(aa+zz)} \times$
$[\frac{du}{u} - \frac{zdz}{aa+zz}] = 0$. En faisant $\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}} = s$, on trouve
$pz^n.(aa+zz)^{\frac{2-n}{2}}.(\frac{ds}{s}) = \frac{2fa}{g^n}(bds.s^{n-1} - zds \times$
$s^{n-1} + s^n dz)$, ou multipliant par s^{-n-1}, & réduisant,
$\frac{-ds}{ss} = \frac{2fad(zs^{-1})}{g^n pz^n s^{-n}(aa+zz)^{\frac{2-n}{2}} - 2fab}$.

Lorſque la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe, on a pour lors $n = 2$, & l'Equation précedente ſe réduit à $\frac{-ds}{ss} = \frac{2fad(zs^{-1})}{g^n p z^2 s^{-2} - 2fab}$, dont les deux membres ſont chacun une différentielle exacte.

On peut donc conſtruire la courbe lorſque n = 0, *& lorſque* n = 2.

REMARQUE I.

319. En général, la ſituation du parallélogramme *BFGH* (Fig. 105) étant donnée, il eſt facile de trouver quelle doit être ſa direction *CE* pour que l'effort contre le centre *C*, réſultant de la réſiſtance du Fluide, ſoit diviſé ſuivant la verticale *CL*. Si de plus, la viteſſe imprimée au centre *C* eſt telle que l'effort ſuivant *CL* ſoit égal à l'action de la peſanteur ſuivant *CK*, il eſt viſible que le point *C*, & le parallélogramme par conſéquent ſeront mûs uniformément en ligne droite ſuivant *CE*.

REMARQUE II.

320. Si une ſurface plane ſuppoſée peſante eſt mûe dans un Fluide ſuivant une ligne oblique au plan de cette ſurface, il ne ſera pas difficile en ſuivant les Principes établis ci-deſſus, de trouver l'Equation de la courbe que cette ſurface doit décrire. On remarquera, au reſte, que dans pluſieurs cas cette courbe doit être à double courbure. Soit, par exemple, la ſurface plane *BFN* (Fig. 104) ſituée verticalement, & mûe ſuivant la ligne

DA oblique au plan de cette ſurface, de façon que ſi on fait paſſer par DA un plan FDA perpendiculaire à cette ſurface, ce plan FDA ne ſoit point vertical; il eſt clair que le point D eſt en même tems pouſſé par trois forces, ſçavoir 1°. par ſa propre tendance ſuivant DA; 2°. par la réſiſtance du Fluide qui agit dans le plan FDA perpendiculairement à FBN. 3°. Enfin, par l'action de la peſanteur ſuivant la verticale DO. Or ces trois forces changeant continuellement de rapport, & les lignes DA, DO &c. ſuivant leſquelles ces forces agiſſent, étant dans des plans différens, il s'enſuit &c.

Pour trouver l'Equation de la courbe, ſoit imaginé un plan vertical PQp (Fig. 106) paralléle à la ſurface FBN, & ſoit tirée dans ce plan la ligne horizontale $Pp\pi$. Que Mm repréſente un des petits côtés de la courbe que nous cherchons: ayant prolongé Mm en n, deſorte que $mn = Mm$, on abaiſſera des points M, m, n, les perpendiculaires MQ, $mqnT$ au plan PQp, & de ces points Q, q, T, les perpendiculaires QP, qp, $T\pi$ à la ligne Pp; il eſt clair qu'on aura $Qq = qT$ & $Pp = p\pi$. Soit MS paralléle à Qq & ms paralléle à qT. La réſiſtance du Fluide agiſſant ſuivant mq perpendiculaire à ms, fait parcourir au point m la ligne ni; & la peſanteur qui agit dans le ſens vertical lui fait parcourir la petite ligne $i\mu$, deſorte qu'il décrit le côté $m\mu$. Cela poſé.

Soit Pp ou $p\pi$, dx; Rq ou rT; dy, Sm ou sn, ds; on aura $ni = -dds$, $i\mu$ ou $tT = ddy$. Ayant mené par le point S la ligne $S\gamma$ perpendiculaire à Mm, on trouve

que l'action résultante de la résistance du Fluide suivant mS est $\frac{f\varphi u . mS^2}{\varphi g . Mm^2}$, & que l'effort qui en provient suivant $m\gamma$ est $\frac{f\varphi u . mS^3}{\varphi g . Mm^3}$. Quant à l'effort de la pesanteur suivant Mg, on trouve qu'il est égal à $p \times \frac{Mf}{Mm}$ (mf est supposée une ligne horizontale, & Mf une ligne verticale).

On aura donc ces trois Equations.

$$1^\circ. \ pdy - \frac{f\varphi u . ds^3}{\varphi g . (dx^2 + dy^2 + ds^2)} = mudu.$$

$2^\circ. -dds = \frac{f\varphi u . ds^2}{muu\varphi g}$. 3°. Enfin $mddy = \frac{p . dx^2 + dy^2 + ds^2}{uu}$.

Si la résistance est comme le quarré de la vitesse, on aura $-dds = \frac{fds^2}{mgg}$, d'où l'on tire $\frac{dx}{ds} - A = \frac{fx}{mgg}$ (j'appelle A ce que devient $\frac{dx}{ds}$ lorsque $x = 0$) : par conséquent $ds = \frac{mggdx}{mgg . A + fx}$, & cette valeur de ds étant mise dans la première & la troisiéme des deux Equations précedentes, on aura, en chassant u, l'Equation de la courbe de projection Qqt en secondes différences.

On peut observer en passant, que l'Equation $ds = \frac{mggdx}{mgg . A + fx}$ est celle de la projection de la courbe Mm sur un plan horizontal qui passeroit par $Pp\pi$.

Remarque III.

321. Si la surface plane BFN (Fig. 107) est située horizontalement dans le Fluide, on peut déterminer alors en général la courbe qu'elle doit décrire, quelle que soit la loi de résistance & le rapport de la résistance initiale à la pesanteur. Car la pesanteur agissant suivant la ligne DN, & la résistance suivant DQ, la direction de ces deux forces dans tous les points de la courbe sera toujours verticale, d'où il s'ensuit que la petite ligne Dg (dy) sera toujours proportionnelle au tems employé à décrire l'Arc Du. Donc $\frac{dy}{g} = \frac{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}{u}$, g étant une constante prise pour garder la loi des homogenes. De plus, la force suivant DQ ou DN est $p - \frac{f\varphi u}{\varphi g}(\frac{uu-gg}{uu})$, & l'on a

$p - \frac{f\varphi u}{\varphi g}(\frac{uu-gg}{uu})\,dx = mudu$. Cette derniére Equation combinée avec l'Equation $\frac{dy}{g} = \frac{dx}{\sqrt{[uu-gg]}}$ donnera la construction de la courbe. Pour déterminer la constante g, on sera attention qu'à l'origine de la courbe, on a $\frac{dy}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}} = \frac{b}{\sqrt{[aa+bb]}} = \frac{g}{g}$. donc $g = \frac{gb}{\sqrt{[aa+bb]}}$.

Si la vitesse initiale suivant DA est telle que la résistance du Fluide fasse équilibre avec l'action de la pesanteur suivant DN, la surface BFN sera mûe uniformément en ligne droite suivant DA.

§. II.

Du mouvement d'un plan circulaire, ou d'une Sphére, dans un milieu de densité variable.

PROBLÊME I.

322. *Un Cercle* CDB (Fig. 108) *étant poussé suivant la direction* CA, *dans un milieu composé de couches paralléles d'une densité variable, auxquelles le plan de ce Cercle* CDB *soit perpendiculaire, trouver la résistance que le Fluide lui fait à chaque instant.*

Soit *PVQ* la surface du Fluide. Ayant tiré par le centre *C* la ligne *OCS* paralléle à *PVQ*, on menera la ligne indéfinie *VCG*, perpendiculaire aux tranches *PVQ*, *OCS*. Nous supposerons que dans chaque tranche en particulier comme *PVQ*, *OCS*, &c. toutes les particules ayent la même densité, & que dans chacune de ces tranches la densité soit proportionnelle à une fonction quelconque des distances correspondantes *VC*, que nous exprimerons ainsi, $\Delta\ (VC)$.

Si on nomme présentement *u* la vitesse du centre *C* suivant *CA*, *f* la résistance que feroit le Fluide à une ligne donnée comme *CA*, s'il venoit frapper cette ligne perpendiculairement avec une vitesse donnée *g*, & qu'il fut d'une densité uniforme, égale à celle qu'il a à une distance donnée *i* de la surface *PVQ*; qu'enfin on suppose la résistance, toutes choses d'ailleurs égales, en raison composée des densités & d'une fonction quelconque

φu,

φu, φg des viteſſes, on trouvera que l'action du Fluide ſuivant mC ſur le petit côté mr, eſt

$\frac{f\varphi u \times \Delta(Vi) \times Ff \times CF^2}{\varphi g . \Delta(i) . mF . CA^2}$; que l'effort qui en réſulte ſuivant CN, eſt $\frac{f\varphi u \times \Delta(Vi) \times Ff . CF^3}{\varphi g . \Delta(i) . CA^3}$; & que l'effort ſuivant $Cb =$ $\frac{f\varphi x \times \Delta(Vi) \times Ff . CF^2}{\varphi g . \Delta(i) . CA^3}$.

On trouve de même, que l'effort ſuivant CN réſultant de l'impreſſion du Fluide ſur le côté MR, eſt $\frac{f\varphi u \times \Delta(VI) \times Ff . CF^3}{\varphi g . \Delta(i) . mF . CA^3}$, & que l'effort ſuivant CB eſt égal à $\frac{f\varphi u \times \Delta(VI) \times Ff . CF^2}{\varphi g . \Delta(i) . CA^3}$.

Donc l'effort ſuivant CN réſultant de l'impreſſion faite ſur les deux côtés mr, MR, eſt $\frac{f\varphi u \times Ff \times CF^3 \times [\Delta(Vi) + \Delta(VI)]}{\varphi g . mF . CA^3 . \Delta(i)}$, & l'effort ſuivant $Cb =$ $\frac{f\varphi u \times Ff . CF^2 \times [\Delta(Vi) - \Delta(VI)]}{\varphi g . CA^3 . \Delta(i)}$.

Si on nomme à préſent les données CA, a ; CG, ϵ ; VC, α ; & l'indéterminée AF, t, on aura $Ff = dt$; $Fm = \surd[2at - tt]$, $AG = \surd[aa - \epsilon\epsilon]$, $Ck = \frac{\epsilon.(a-t)}{a}$, kI ou $ki = \frac{\surd[aa - \epsilon\epsilon] . \surd[2at - tt]}{a}$, & par conſéquent $Vi = VC + Ci = \alpha + \frac{\epsilon.(a-t) + \surd[aa-\epsilon\epsilon] . \surd[2at-tt]}{a}$,

Sſ

& VI ou $VC - CI = a - \frac{\sqrt{[aa-tt]}.\sqrt{[2at-tt]} - t.(a-t)}{a}$.

On ſubſtituera maintenant dans les expreſſions précedentes des efforts ſuivant CN & Cb, à la place des lignes qui y entrent, les valeurs analytiques de ces lignes qu'on vient de trouver. On prendra enſuite l'intégrale de chacune de ces expreſſions, en ne regardant que t comme variable, & la valeur de cette intégrale lorſque $t = a$, exprimera l'effort total, tant ſuivant CN que ſuivant Cb. *Ce Q. F. Trouver.*

COROLLAIRE.

323. Si le Cercle CDB eſt ſuppoſé très-petit, alors il eſt évident que chacune des lignes CI, Ci, eſt très-petite par rapport à VC (α). D'où il s'enſuit, que ſi en regardant α comme variable, on prend la différence de $\Delta(\alpha)$ que je ſuppoſe $= d\alpha\,\Gamma(\alpha)$ ($\Gamma\alpha$ exprimant une fonction de α) on pourra ſuppoſer $\Delta(Vi) = \Delta(\alpha) + Ci.\Gamma(\alpha)$ & $\Delta(VI) = \Delta(\alpha) - CI.\Gamma(\alpha)$. Ainſi l'élément de l'effort ſuivant CN, eſt pour lors

$$\frac{f\varphi u \times (a-t)^3 dt \times [2\Delta(\alpha) + \frac{2t(a-t).\Gamma(\alpha)}{a}]}{\varphi g.a^3\sqrt{[2at-tt]}.\Delta(i)},$$

& l'élément de l'effort ſuivant Cb, eſt

$$\frac{f\varphi u \times (a-t)^2.dt \times 2\sqrt{[aa-tt]}.\sqrt{[2at-tt]}.\Gamma(\alpha)}{\varphi g.a^3.a\Delta(i)}.$$

Donc l'effort ſuivant CN, eſt

$$\frac{f\varphi u.2\Delta(\alpha)}{\varphi g.\Delta(i)}\left(\frac{3aa.\sqrt{[2at-tt]}-(2at-tt)^{\frac{3}{2}}}{3a^3}\right) + \frac{f\varphi u}{\varphi g} \times \frac{2t\Gamma(\alpha)}{\Delta(i)} \times$$

$$\left(\frac{4.(a-t)^3 \sqrt{[2at-tt]} + 3\int aadt \sqrt{[2at-tt]} + 3.(a-t).(2at-tt)^{\frac{3}{2}}}{4a^4}\right)$$

& si l'on fait $t = a$, on aura l'effort entier suivant CN, égal à $\frac{f\varphi u}{\varphi g}\left(\frac{2\Delta(a)}{3\Delta(i)} + \frac{3\iota\Gamma(a).c}{2\Delta(i).8a}\right)$ en supposant que c soit la circonférence $DbAD$ du Cercle proposé. On remarquera que dans cette expression, le terme $\frac{f\varphi u \times 3\iota\Gamma(a).c}{\varphi g.2\Delta(i).8a}$ est infiniment petit par rapport à l'autre, & qu'ainsi, on peut, si l'on veut, le négliger.

On trouvera de même que l'effort suivant Cb, est $\frac{f\varphi u}{\varphi g} \times$

$$\frac{2\sqrt{[aa-tt]}.\Gamma(a)}{\Delta(i)} \times \frac{(a-t).(2at-tt)^{\frac{3}{2}} + \int aadt\sqrt{[2at-tt]}}{4a^4},$$

& par conséquent l'effort total suivant Cb, sera

$$\frac{f\varphi u \times [aa-tt].\Gamma(a) \times c}{\varphi g.2\Delta(i).8a}.$$

PROBLÈME II.

324. *Trouver la courbe décrite par le centre* C *d'un petit Cercle* CBA *sans pesanteur, mû dans un milieu de densité variable.*

Ayant appellé x la ligne VC (Fig. 109) qu'on avoit nommée α dans l'art. précedent, CO, dx, Ou, dy, & m la masse du Cercle proposé, on a ces deux Equations,

$$(3) \ldots\ldots\ldots \frac{f\varphi u.2\Delta(x)}{\varphi g.3\Delta(i)}.\sqrt{[dx^2+dy^2]} = -mudu,$$

$$\& \frac{cf\varphi u.dy.\Gamma(x).(dx^2+dy^2)}{\varphi g.16uu\Delta(i)} = mdxddy \ldots\ldots\ldots (4).$$

Si l'on ſuppoſe préſentement la réſiſtance comme le quarré de la viteſſe, & qu'on faſſe $ady = zdx$ & $gg = \frac{2fe}{m}$, il vient

$$\frac{cdx\Gamma(x)}{2.16\Delta(i)} = \frac{eaadz}{z.(aa+zz)}$$

dont l'intégrale (en ſuppoſant qu'à l'origine de la courbe $x = r$, $z = h$) eſt

$$\frac{c[\Delta(x) - \Delta(r)]}{2e.16\Delta(i)} = \log. \frac{z\sqrt{[aa+bb]}}{h\sqrt{[aa+zz]}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Par le moyen de cette Equation, & de l'Equation $ady = zdx$, on conſtruira ſans peine la courbe cherchée. *Ce Q. F. Trouver.*

COROLLAIRE I.

325. Dans l'Equation (5) que nous venons de trouver, & qui ſert à conſtruire la courbe quand la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe; il eſt à remarquer que $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}}$ exprime le Sinus de l'angle ACa à chaque point de la courbe, & que par conſéquent log. $\frac{z\sqrt{[aa+bb]}}{h\sqrt{[aa+zz]}}$, exprime le Logarithme du rapport de ce Sinus avec le Sinus du premier angle dont la tangente eſt h, & qu'on peut appeller *angle de projection.*

De-là il s'enſuit, que *ſi deux Cercles égaux, décrivent dans le même milieu, de denſité variable, & réſiſtant comme le quarré de la viteſſe deux courbes différentes* QMS,

RCK, (Fig. 110) *le Sinus de l'angle* NMS *est au Sinus de l'angle correspondant* LCK *dans la raison constante du Sinus de l'angle* TQO *au Sinus de l'angle* GRF.

Remarque I.

326. On peut encore démontrer la raison constante des Sinus des angles *NMS*, *LCK*, par une autre Méthode fort simple, & qui fait voir en même tems que cette propriété n'a lieu que dans le cas ou $\varphi u = uu$.

Pour cela, on remarquera que si le Sinus de l'angle *ACM* (Fig. 111 & 112) est au Sinus de l'angle *BCM* qui en différe infiniment peu, comme le Sinus de l'angle *ac*M au Sinus de l'angle *bc*M, on aura $\frac{AO}{AM} = \frac{ao}{aM}$, & par conséquent $\frac{AB \times CM}{AC \cdot AM} = \frac{ab \cdot cM}{ac \cdot aM}$. D'où il s'ensuit, qu'afin que le Sinus de l'angle *NMS* (Fig. 110) soit toujours en raison constante avec le Sinus de l'angle *LCK*, il faut qu'en général pour une même abscisse *QT* (x), l'angle de contingence multiplié par le rapport de dx à dy soit une quantité constante. Or l'Equation générale (4) de l'*article* 324, donne $\frac{cfdx\Gamma(x)\varphi u}{16muu\Delta(1)\cdot\varphi g}$ pour le produit de l'angle de contingence $\frac{dxddy}{dx^2+dy^2}$ par $\frac{dx}{dy}$; & l'on voit que pour une même x ce rapport est toujours le même dans le cas où $\varphi u = uu$, & qu'il ne peut être le même dans aucun autre cas, qu'en supposant que u soit toujours la même

pour une même x dans deux courbes différentes. Mais l'Equation (3) de l'*article* 324. fait voir que cela est impossible. Donc &c.

COROL. II.

327. L'Equation (5) de l'*article* 324, fait voir que pour un même angle de projection, toutes choses d'ailleurs égales, la courbe décrite est toujours la même, quelle que soit la vitesse initiale. Car la seule quantité qui pût faire varier la courbe dans les différens cas, est la quantité $e = \frac{mgg}{2f}$, & cette quantité est toujours la même 1°. parce que g est une vitesse quelconque indépendante de la vitesse initiale. 2°. Parce que quand on prendroit g pour la vitesse initiale, on auroit toujours dans le cas présent $\frac{gg}{2f}$ constante. Donc &c.

En prenant g pour une vitesse quelconque donnée, l'Equation $e = \frac{mgg}{2f}$, fait voir que pour deux petits Cercles inégaux de même matiére & de même densité, e est proportionnelle au rayon de chacun, puisque f est comme a & m comme aa. Donc $\frac{e}{a}$ est une quantité constante. Donc *quelque différence qu'il y ait dans les rayons des deux Cercles & dans leurs vitesses initiales, ils décriront la même courbe, toutes choses d'ailleurs égales, pourvû que la résistance soit comme le quarré de la vitesse.*

Il n'en feroit pas ainfi, fi les deux Cercles n'étoient pas de la même matiére. Car alors *m* ne feroit plus comme *aa*, mais comme *paa*, *p* étant une variable qui dépendroit de la denfité de la matiére du Cercle.

REMARQUE. II.

328. Lorfque *e* n'eft point infiniment grande par rapport à *a*, ce qui arrive, quand la denfité du milieu a un rapport fini avec celle du Cercle, la courbe que le Cercle décrit n'eft point alors, comme on pourroit d'abord le penfer, une courbe peu différente de la ligne droite, mais elle a une courbure très-fenfible, comme on le voit par l'Equation entre *z* & *x*. Ce qui d'ailleurs ne doit pas paroître furprenant, puifque la force *f*, comme il eft aifé de le voir, eft proportionnelle à *a*; & la force fuivant *Cb*, (Figure 109) toutes chofes d'ailleurs égales, proportionnelle à *aa*. Or la maffe à mouvoir, qui eft celle du Cercle, eft auffi proportionnelle à *aa*. Donc l'effort que fait la force fuivant *Cb* fur la maffe infiniment petite *m*, pour l'écarter de fa direction, eft analogue à celui que feroit la réfiftance du Fluide fur un Cercle de grandeur finie. Donc &c.

Il me paroît donc qu'on doit entendre avec quelque reftriction ce que dit M. *Newton* dans le Scol. de la Propof. 16. L. II. de fes Principes. *Que dans les recherches qu'il a faites fur les trajectoires décrites par des Corps dans des milieux d'une denfité variable, il a fuppofé que le mobile étoit affez petit pour pouvoir être regardé à chaque inftant,*

comme étant dans un milieu de denſité uniforme. * On ne peut faire cette ſuppoſition que dans le cas où la force ſuivant Cb eſt infiniment petite par rapport à la force centripete, ſuppoſition, qui n'eſt légitime, phyſiquement parlant, que quand la denſité du milieu eſt très-petite par rapport à celle du mobile.

C o r o l. III.

329. Si la denſité augmente à meſure que x augmente, la courbe ſera convexe vers l'Axe des x, & on aura $z = \infty$, lorſque $\frac{c[\Delta(x) - \Delta(r)]}{2e \cdot 16 \Delta(i)} = L^{**} \frac{\sqrt{[aa+hh]}}{h}$. Il eſt facile de s'aſſurer que la courbe remontera enſuite, en tournant ſa concavité vers l'Axe des x, par une branche égale & ſemblable à la premiére.

R e m a r q u e III.

330. Si deux milieux AB, CD, (Fig. 114) d'une denſité uniforme, ou qui varie très-peu dans une grande étendue ſont ſéparés par un milieu BC, dont les différentes couches varient beaucoup de denſité dans un très-petit eſpace, & dont la denſité en B & en C ſoit la même que celle des deux milieux qui lui ſont contigus, il eſt aiſé de conclure de tout ce qui a été dit juſqu'ici, qu'un plan circulaire ou un Corps ſphérique (car nous ferons

* *Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligenda ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat.*

** Cette lettre *L* ſignifie *Logarithme.*

voir

voir ci-après & indépendamment de ceci, que tout ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique à la Sphére); il est aisé de conclure, dis-je, qu'un tel Corps, si on le suppose d'un diamétre très-petit par rapport à *BC*, traversera d'abord le milieu *AB* en ligne droite, souffrira ensuite une réfraction dans le milieu *BC*, & traversera enfin en ligne droite le milieu *CD*, de façon que le Sinus d'incidence en *B* sera au Sinus de réfraction en *C* en raison constante; que la réfraction se fera en s'approchant de la perpendiculaire, si la densité du milieu va en diminuant de *B* en *C*, & au contraire si elle va en augmentant; & que dans ce dernier cas la réfraction pourra même se changer quelquefois en réflexion (*art.* 329.)

Comme ceci pourroit conduire à une explication de la réfraction de la lumiére assez plausible en apparence, j'ai cru qu'il ne seroit pas hors de propos d'examiner ici plus en détail, si cette explication peut se concilier en effet avec tous les Phenomenes.

La différente réfrangibilité des rayons diversement colorés, ne sera pas le point le plus difficile à expliquer. Il n'y aura qu'à supposer (*art.* 327.) que la différence des couleurs vient, non de la différente vitesse des rayons, mais de la différence de matiére & de densité des Globules lumineux.

Un autre Phenomene, est que la réfraction n'affoiblit pas sensiblement la lumiére, & qu'un rayon qui a traversé, par exemple, un verre plan d'une très-petite épaisseur, n'a rien perdu sensiblement de sa vitesse & de sa

force. Voyons ſi l'explication de ce Phenomene dans notre hypotheſe eſt auſſi facile que celle des précedents.

Soit *Nn* (Fig. 115) le verre, & *AB*, *ab*, l'air; *BC*, *cb*, la petite Athmoſphére qui cauſe la réfraction, & dont on peut ſuppoſer, ſi l'on veut, qu'une partie entre dans le verre. Comme la réfraction de l'air dans le verre ſe fait en s'approchant de la perpendiculaire, il eſt néceſſaire que l'Athmoſphére *BC* aille en diminuant de denſité de *B* en *C*. Par la même raiſon, on ne peut ſuppoſer que cette Athmoſphére ne commence qu'en *B*, & que l'eſpace *AB* qui eſt au-deſſus ſoit regardé comme vuide. Car alors la Sphére en entrant dans le milieu *B* ſouffriroit une réfraction, qui dérangeroit entiérement (*article* 278.) le rapport conſtant des Sinus; d'ailleurs, ſi l'incidence du rayon étoit fort oblique, il ſe réflechiroit ſans entrer dans le verre, ce qui eſt contre l'Expérience.

L'Equation entre les x & les z de la courbe que le rayon décrit dans l'eſpace *BC*, eſt $\frac{c[\Delta(x) - \Delta(r)]}{32e\Delta(i)} = L\frac{z\sqrt{[aa+bb]}}{b\sqrt{[aa+zz]}}$, où $\Delta(r)$ exprime la denſité en *B*, c'eſt-à-dire la denſité du milieu *AB*, & où l'on peut ſuppoſer $\Delta(r) = \Delta(i)$. Or le rapport des Sinus de l'air dans le verre étant celui de 3 à 2, il s'enſuit que ſi on appelle C la denſité en *C*, B la denſité en *B*, on aura $\frac{c}{32e} = \frac{B \cdot L\frac{3}{2}}{B - C}$ donc e ne ſauroit être plus grand que $\frac{c}{32L\frac{3}{2}}$. On a de plus, $e = \frac{mgg}{2f}$, f exprimant la réſiſtance du milieu *AB*. D'où il

eſt aiſé de conclure, que le Logarithme du rapport de la viteſſe en *B* à la viteſſe en *A* feroit $-\frac{AB}{c}$, quantité plus grande ou au moins égale à $\frac{(32[L3-L2]).AB}{c}$. Or comme *c* doit être ſuppoſé très-petit par rapport à *BC*, il s'enſuit, à plus forte raiſon, qu'il doit être très-petit par rapport à *AB*. D'où il s'enſuit 1°. que les rayons de lumiére arriveroient à nos yeux avec une viteſſe preſque infiniment plus petite, que celle qu'ils ont en ſortant du Soleil. Or la Théorie de l'aberration, qui comme M. *Clairaut* l'a fait voir en 1739. eſt preſque une démonſtration du ſyſtême de l'émiſſion des Corpuſcules lumineux, prouve au moins qu'en admettant cette hypotheſe, on doit ſuppoſer que les rayons de lumiére ne perdent rien, ou preſque rien de leur viteſſe, en venant du Soleil juſqu'à nous. 2°. Comme les eſpaces *BC*, *cb* ſont ſuppoſés très-grands par rapport au diamétre des Corpuſcules lumineux, il eſt clair que le rayon en traverſant ces eſpaces doit faire encore une perte conſidérable de ſa viteſſe, & paroître beaucoup plus foible à ſa ſortie qu'il n'étoit à ſon entrée, ce qui ne s'accorde nullement avec ce que nous éprouvons tous les jours. Ces deux raiſons réunies me font croire, indépendamment de quelques difficultés Phyſiques, qu'on pourroit propoſer ſur les Athmoſphéres conſidérées en elles-mêmes, que l'explication précedente de la réfraction de la lumiére, quoiqu'en apparence fort exacte, ne peut cependant ſe concilier avec les Phenomenes.

Corol. IV.

331. Si dans l'*article* 324. on suppoſe la réſiſtance comme une puiſſance u^n de la viteſſe, on aura les deux Equations

$$\frac{fdx}{g^n} \cdot \left(\frac{2\Delta(x)\sqrt{[aa+zz]}}{3a\Delta(i)}\right) = -mu^{1-n}du,$$

$$\& \frac{cfz \cdot [aa+zz] \cdot dx\Gamma(x)}{16aag^n dz\Delta(i)} = mu^{1-n}.$$

On différentiera cette derniére Equation, & égalant enſuite les deux valeurs de $mu^{1-n}du$, on aura, en ſuppoſant

$$\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}} = \frac{t}{a},$$

$$[n=2]\left(\frac{2\Delta(x).a}{3\Delta(i)\sqrt{[aa+tt]}}\right) = d\left(\frac{ct\Gamma(x)}{16dt\Delta(i)}\right).$$

Cette Equation eſt intégrable en quelques cas. Car ſoit, par exemple, $\Delta(x) = q^x$, q repréſentant le nombre dont le Logarithme eſt l'unité, on aura, en faiſant $dt = tds$ & $dx = pds$,

$[n-2]\left(\frac{2apds}{3\sqrt{[aa+q^t]}}\right) = \frac{cdp+cppds}{16}$, Equation dans laquelle les variables p, s, peuvent être ſéparées facilement.

On peut donc conſtruire la courbe, lorſque $\varphi u = u^n$ *&* $\Delta(x) = q^x$; & il eſt à remarquer (*art.* 81.) que l'hypotheſe des denſités proportionnelles à q^x eſt celle que l'on fait ordinairement, des denſités proportionnelles aux poids comprimans, ou aux poids comprimans augmentés d'une quantité conſtante.

REMARQUE IV.

332. Il n'a été queſtion juſqu'à préſent que de la courbe décrite par un très-petit Cercle dans un milieu de denſité variable. Il y a cependant des cas où il n'y a pas plus de difficulté pour un grand Cercle que pour un petit. Par exemple, ſi la denſité du milieu eſt proportionnelle à $g + x$, γ étant une conſtante quelconque, l'expreſſion de la force ſuivant Cb ſe trouve la même pour un grand Cercle que pour un petit. La ſolution du Problême eſt donc alors la même pour tous les cas, & ce que nous avons dit (*articles* 323, 324, 325, 329.) doit s'appliquer ici.

COROL. V.

333. Si le milieu étoit diſpoſé par tranches circulaires PVQ, βCq (Fig. 116), & qu'on ſuppoſât le Cercle NCB très-petit, la queſtion ne ſeroit pas plus difficile : car nommant la donnée VG, k, & CG, x, il n'y auroit qu'à mettre $k - x$ au lieu de α dans l'expreſſion de l'effort ſuivant CN, & de l'effort ſuivant Cb.

Si la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe, le rayon de la développée $\frac{Ci^2}{oi}$ ſera en raiſon inverſe de $\frac{cf\Gamma(k-x).\sqrt{[aa-ii]}}{16amgg\Delta(i)}$. Or ſi du point G on abaiſſe ſur CA la perpendiculaire GS que nous nommerons s, on trouve $\frac{Ci^2}{oi} = \frac{xdx}{-ds}$ & $\frac{\sqrt{[aa-ii]}}{a} = \frac{s}{x}$; donc ſi on met pour s ſa

valeur $\frac{xz}{\sqrt{[aa+zz]}}$, on aura

$\frac{-aadz}{z.aa+zz} = \frac{dx}{x} + \frac{cdx\Gamma(k-x)}{32c\Delta(t)}$, Equation qui servira à construire la courbe, & d'où l'on tirera le même Theorême que dans l'*art.* 325, en supposant que dans la Figure 110 les lignes *QR*, *TMGK*, soient des Cercles concentriques.

PROBLÊME III.

334. *Une Sphére sans pesanteur étant mûe suivant une direction quelconque dans un Fluide d'une densité variable, trouver la résistance que fait le Fluide à cette Sphére.*

Soit *CA* (Fig. 113) la direction du centre *C*; on fera passer par la ligne *CA* un plan perpendiculaire aux tranches *PVQ*, *OCS*, qui formera dans la surface de la Sphére le grand Cercle *CABD*; on imaginera ensuite le plan *FZK* perpendiculaire au plan *CBA*, & dont la commune section *FK* avec le plan *CBA* soit perpendiculaire à *CA*, & on supposera que le plan *fzk* soit infiniment proche & paralléle à *FZK*, ce qui formera sur la surface de la Sphére, la demi-Zone circulaire *FKkf*. Nous commencerons par chercher les efforts, tant suivant *CN* que suivant *Cb*, qui résultent de la résistance du Fluide à la demi-Zone *FkKf*.

Pour cela, nous prendrons d'abord deux Arcs *Zt*, *Zu*, égaux entr'eux, de part & d'autre du point de milieu *Z* de la demi Zone. Nous nommerons *CA*, *a*, la circonfé-

rence $DABD$, c, & nous ſuppoſerons que f ſoit la réſiſtance que feroit le Fluide à la ſurface circulaire $DACBD$, s'il venoit la frapper perpendiculairement avec une viteſſe donnée g, & qu'il fut d'une denſité uniforme égale à celle qu'il a à la diſtance i de la tranche PVQ; enfin nous appellerons les données $VC, \alpha, AG, \varepsilon$, & u la viteſſe du centre C ſuivant CA.

Qu'on mene préſentement dans le Cercle FZK les ordonnées εr, uR, & par les points r, R, les perpendiculaires RI, ri dans le plan CAB; il eſt clair que ſi on ſuppoſoit la denſité du Fluide uniforme partout, & égale à la denſité qu'il a à la diſtance i du point V, l'effort ſuivant Cb réſultant de la réſiſtance du Fluide à la petite ſurface *ehgo*, feroit (comme nous l'avons démontré dans l'*article 296. n. 8.*) $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df . d(\varepsilon r)}{\varphi g . cu . Ff^2}$; mais comme la denſité n'eſt pas uniforme, & que $\Delta(Vi)$ exprime la denſité en ε, il faut multiplier l'expreſſion précedente par $\frac{\Delta(Vi)}{\Delta(i)}$, & l'on aura $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df . d(\varepsilon r) \times \Delta(Vi)}{\varphi g . ca . Ff^2 . \Delta(i)}$. On aura de même $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df \times \Delta(VI)}{\varphi g . ca . Ff^2 . \Delta(i)} \times d(\varepsilon r)$ pour l'effort ſuivant CB, réſultant de la réſiſtance du Fluide à la petite ſurface $unlm$; & l'effort qui réſulte de ces deux-là ſuivant Cb, ſera $\frac{f\varphi u \times 2DF^2 . Df \times d(\varepsilon r) \times [\Delta(Vi) - \Delta(VI)]}{\varphi g . ca . Ff^2 . \Delta(i)}$. Nous nommerons à préſent CO, γ; OF ou $O\varepsilon$, β; εr, t; & nous aurons $Cd = \frac{\gamma t}{\alpha}$, ID ou $id = \frac{OR \times AG}{CA} =$

$\frac{\sqrt{[\beta\beta - tt]} . \sqrt{[aa - ii]}}{a}$: ces différentes valeurs étant substituées dans l'expression précedente de l'effort suivant Cb, on aura la différentielle de cet effort; on intégrera cette quantité en ne faisant varier que t qui est en effet dans la supposition présente la seule variable, & l'on aura l'effort suivant Cb résultant de la résistance du Fluide à la demi-Zone $FKkf$. Si on double cette intégrale, on aura l'effort suivant Cb provenant de la résistance faite à la Zone entiére; enfin, si on intégre de nouveau, en regardant CO, OF comme variables, & mettant $\frac{2CO^2}{CA^2} \times Df$ à la place de $\frac{2DF^2 . Df}{Ff^2}$ dans l'expression précedente, on aura l'effort cherché suivant Cb.

Nous supposerons afin de simplifier le calcul que la Sphére $CBAB$ soit très-petite; en ce cas, on trouvera par une Méthode semblable à celle de l'*article* 323. que l'effort entier suivant Cb, est $\frac{2f\varphi u . 2DF^2 . Df . 2\sqrt{[aa - ii]} . FZO . \Gamma(a)}{\varphi g . ca . Ff^2 . a\Delta(i)}$. Mais le demi-Cercle $2 . FZO$ est au demi-Cercle DAa $(\frac{ca}{4})$ :: OF^2, CA^2. Donc l'expression précedente se change en

$$\frac{f\varphi u}{\varphi g} \times \frac{OF^2 . DF^2 . Df . \sqrt{[aa - ii]} . \Gamma(a)}{CA^2 . Ff^2 . a\Delta(i)},$$

Expression de l'effort suivant Cb résultant de la résistance faite à la Zone entiére.

Soit à présent $CO = x$, on aura $OF = \sqrt{[aa - xx]}$, & l'expression précedente deviendra

$f\varphi u$

$\frac{f\varphi u}{\varphi g} \cdot \frac{\Gamma(a)\sqrt{[aa - ii]}}{a\Delta(i)} \times \frac{-x^2 dx . (aa - xx)}{a^4}$, dont l'intégrale complette eſt

$$\frac{2f\varphi u . \Gamma(a)\sqrt{[aa - ii]}}{15\varphi g . \Delta(i)},$$

Expreſſion de l'effort ſuivant *Cb* réſultant de la réſiſtance faite à la Sphére ou demi-Sphére entiére.

On trouvera de même que l'effort total ſuivant *CN*, eſt $\frac{2f\varphi u \times \Delta(a)}{\varphi g . 4\Delta(i)} + \frac{4f\varphi u \times i\Gamma(a)}{\varphi g . 5\Delta(i)}$. On peut, ſi l'on veut, négliger le ſecond terme de cette expreſſion qui eſt nul par rapport au premier.

COROLLAIRE.

335. Les expreſſions précedentes des efforts ſuivant *CN* & *Cb*, étant les mêmes pour la Sphére que pour le Cercle à quelques coefficiens près, tout ce qu'on a dit depuis l'*article* 324. juſqu'au 333. incluſivement, peut aiſément s'appliquer à la Sphére.

REMARQUE I.

336. Si on ſuppoſoit la Sphére peſante, il ſeroit aiſé de trouver l'Equation de la courbe qu'elle décriroit, & la difficulté ne pourroit être que dans le calcul.

REMARQUE II.

337. Si un parallélogramme rectangle ſans peſanteur *BFGD* (Fig. 117) étoit ſitué dans un milieu de denſité va-

riable, de maniére que la diagonale *GCB* de ce parallélogramme fut paralléle à la ſurface *PVQ* du Fluide, ce parallélogramme, pouſſé ſuivant la direction de ſa diagonale *CD*, iroit dans le Fluide en ligne droite.

Cette propoſition eſt ſi facile à démontrer, & ſi analogue à celle que nous avons prouvée (*article* 307.) du Chap. ſur la Réfraction, que nous jugeons inutile de nous y arrêter.

§. III.

Où l'on réſout les Problêmes précedens & quelques autres, dans l'hypotheſe que le Fluide ſoit en mouvement.

PROBLÊME I.

338. *Trouver la courbe décrite par un parallélogramme rectangle ſans peſanteur, pouſſé ſuivant une direction* CE (Fig. 118) *& avec une viteſſe quelconque, dans un Fluide qui ſe meut auſſi uniformément ſuivant une direction quelconque* DP.

Soit *DM* paralléle à *CE*, & ſoit *DM* à *DP* comme la viteſſe du parallélogramme dans un inſtant propoſé eſt à la viteſſe du Fluide. Si on regarde la viteſſe *DP* comme compoſée des deux *DM* & *DZ*; il eſt évident que la viteſſe *DM* étant commune au Fluide & au parallélogramme, le Fluide n'agira ſur le parallélogramme qu'avec la viteſſe & ſuivant la direction *DZ*; d'où l'on voit que l'action du Fluide s'exercera, ou ſur les côtés *FB*, *HB*, ou ſur le côté *HB* ſeul, ou ſur les côtés *GH*, *HB*,

selon que la ligne *OD* sera située par rapport à ces côtés.

Soit à présent *C* (Fig. 119) le centre du parallélogramme, *CD* sa direction au premier instant, *CP* la direction du Fluide. Si l'on suppose que les petites lignes *CD*, *CP*, que le point *C* & le Fluide tendent à parcourir au premier instant, représentent leurs vitesses, *DP* sera la direction de l'impression du Fluide. Or si l'effort résultant de cette impression fait parcourir au centre *C* la ligne *DE* dans le premier instant, il s'ensuit que le centre *C* parcourra dans le premier instant la ligne *CE*. Dans le second instant le point *C* tend à parcourir $Ed = CE$; si l'on fait le triangle *dEp* égal & semblable au triangle *CEP*, on voit encore que *dp* égale & parallèle à *PE* est la direction de l'impression du Fluide, & on trouvera de la même façon le côté *Ee* que le centre *C* doit parcourir au second instant. Maintenant que par le point *C* on mene *Cδ* égale & parallèle à *PD*, & qu'on suppose que la vitesse & la direction du parallélogramme dans le Fluide en repos soit représentée par *Cδ*, il est évident qu'en menant *δε* égale & parallèle à *DE*, la ligne *Cε* sera le premier petit côté de la courbe, & parallèle à *PE*; & par la même raison, que le second petit côté *εe* est égal & parallèle à *pe*. On voit de plus, que $\epsilon e = 2CP$ & que le tems employé à parcourir uniformément *εe* avec la vitesse du Fluide, seroit égal au tems par l'Arc *Cεe*, & ainsi de suite : d'où l'on tire la solution suivante.

On construira (*art.* 311) la trajectoire *Cεe* décrite par le centre *C*, mû avec la vitesse & la direction *Cδ*

dans le Fluide en repos. Par un point quelconque e de cette trajectoire, on tirera l'Ordonnée $e\epsilon$ paralléle à CP, & telle que le tems employé à parcourir cette Ordonnée avec une viteſſe uniforme égale à celle du Fluide, ſoit égal au tems par l'Arc $C\epsilon e$; je dis que le point ϵ ſera à la courbe cherchée.

COROLLAIRE I.

339. Si la réſiſtance eſt comme une puiſſance quelconque n de la viteſſe, nous avons vû (*art.* 312.) que la trajectoire $C\epsilon e$, a un cours infini lorſque $n =$ ou > 2. Donc dans ces cas-là, la trajectoire $CE\epsilon$ aura auſſi un cours infini. Si $n < 2$ mais $=$ ou > 1, nous avons vû qu'en ce cas la trajectoire $C\epsilon e$ n'a qu'un cours fini, mais que le tems employé à la parcourir eſt infini. Donc dans ce même cas la trajectoire $CE\epsilon$ a un cours infini, & une aſymptote paralléle à CP. Enfin ſi $n < 1$, comme dans ce cas la trajectoire $C\epsilon e$ n'a qu'un cours fini, & que le tems employé à la décrire eſt fini auſſi, la trajectoire $CE\epsilon$ n'aura non plus qu'un cours fini. La tangente à l'extrêmité de cette trajectoire ſera paralléle à CP, & la viteſſe du centre C à cette extrêmité, égale à la viteſſe du Fluide. Donc le centre C après avoir décrit la courbe $CE\epsilon$, ne fera plus que ſuivre la direction du courant.

On pourroit, ce me ſemble, conclure de-là, que ſi la réſiſtance des Fluides eſt proportionnelle à quelque puiſſance n de la viteſſe, cette puiſſance n doit être moindre que l'unité. Car l'Expérience fait voir qu'un Corps,

poussé suivant une direction quelconque dans une eau courante, se met assez promptement dans la direction du courant. Il est vrai que la résistance vient alors en grande partie de la tenacité du Fluide, dont nous faisons ici abstraction.

COROL. II.

340. Comme la vitesse est nulle à la fin de la trajectoire Ce, & que la vitesse le long de l'Ordonnée ee, est constante, il est évident, comme nous venons de le remarquer, qu'à l'extrêmité de la trajectoire CEe vers e, la tangente de cette trajectoire est paralléle à CP. D'où il s'ensuit que la trajectoire CEe, doit avoir un point d'inflexion, lorsque le rapport des vitesses initiales CD, CP est tel, que l'effort résultant de l'impression du Fluide, au lieu d'agir suivant DE agit en sens contraire, de façon que l'angle $PCE > PCD$. Ce qui arrive, par exemple, quand l'angle ODB (Fig. 118) $> BCA$.

REMARQUE I.

341. On peut encore s'y prendre de la maniére suivante, pour déterminer l'impression du Fluide sur le parallélogramme & la courbe qu'il doit décrire. Soit CP (Figure 120) la vitesse & la direction du Fluide, CI la vitesse & la direction du rectangle. Qu'on imprime à ce rectangle & au Fluide une vitesse Cp égale à CP & dans une direction contraire, la résistance du Fluide demeurera la même qu'auparavant. Or le parallélogram-

me eſt alors dans le même cas, que s'il étoit mû dans le Fluide en repos ſuivant la direction CV, qui eſt à la fois diagonale du parallélogramme $CIVp$ & côté du parallélogramme $CPIV$.

Donc ſi l'on cherche la trajectoire que le parallélogramme décriroit dans ce dernier cas, & qu'on faſſe enſuite mouvoir cette trajectoire uniformément ſuivant CP, en rendant ainſi au Fluide & au parallélogramme la viteſſe qu'on leur avoit ôté, il eſt clair qu'on aura la trajectoire qu'on cherche.

Quoique cette ſolution ſoit ſimple, je préférerois néanmoins celle de l'*art.* 338, par ce qu'on y voit plus clairement, ce me ſemble, que dans celle-ci, l'uſage & l'étendue du Principe de cette ſolution, & pourquoi on ne ſauroit s'en ſervir quand le mouvement du Fluide n'eſt pas uniforme.

REMARQUE II.

342. Si on vouloit réſoudre le Problême par le calcul ſans rien ſuppoſer de ce qui a été fait dans l'*art.* 338, on pourroit employer une Méthode ſemblable à celle de cet *art.* 338 ; car appellant s le Sinus de l'angle PDB, s ſon Coſinus, on parviendroit à une Equation de cette forme

$$\ldots\ldots\ldots\left(\frac{baadz}{aa+zz}+\frac{bzdu}{u}\right).\left[a-\frac{es\sqrt{[aa+zz]}}{au}\right]^2=$$

$$\left(\frac{aadu}{u}-\frac{aazdz}{aa+zz}\right).\left[z-\frac{es\sqrt{[aa+zz]}}{au}\right]^2,$$

& faiſant $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u}=q$, on auroit

$(bqdz - bzdq) : (z - \frac{eqs}{a})^2 = (-aadq) : (a - \frac{esq}{a})^2$,

dont l'intégrale eſt

$M - bq : (z - \frac{eqs}{a}) = -a^3 : es(a - \frac{esq}{a})$, M étant une conſtante.

COROL. III.

343. Si une ſurface plane ſans peſanteur eſt mûe obliquement dans un Fluide, qui ſe meuve auſſi ſuivant une direction quelconque, ce Problême n'eſt qu'un cas particulier du précedent, lorſque la direction du Fluide & de la ſurface ſont l'une & l'autre dans un même plan perpendiculaire au plan de la ſurface. Car le Problême ſe réduit alors (*article* 315.) au cas où la largeur du parallélogramme HB ſeroit infiniment petite.

Si les deux directions de la figure plane, & du Fluide ſont dans un plan oblique au plan de cette figure, le Problême peut encore ſe réſoudre très-aiſément par la Méthode de l'*article* 338, ou de celle de l'*article* 341. On obſervera que la courbe décrite en ce cas n'eſt pas à double courbure, parce que la figure demeure toujours dans ſon mouvement paralléle à elle-même, & que le Fluide agit perpendiculairement à ſon plan; la courbe aura tous ſes points dans un plan perpendiculaire à la figure, & ſera la coupe d'un Cylindre qui auroit pour baſe la courbe décrite dans le Fluide en repos, & dont les côtés ſeroient paralléles à la direction du Fluide.

REMARQUE III.

344. Suppoſons que *BFGH* (Figure 118) ſoit un navire rectangle réduit à ſon centre *C* (Fig. 121) : ſi la direction & la viteſſe *CP* du vaiſſeau ſont données auſſi-bien que la direction & la viteſſe *CT* de l'eau, il ſera facile de trouver la poſition de la voile *NS* & la viteſſe du vent néceſſaires, pour que le navire aille uniformément en ligne droite. Car ayant trouvé la direction *YC* de l'effort réſultant de la réſiſtance du Fluide, & ayant mis la voile *NS* dans une ſituation perpendiculaire à *YC*, ſi on prend enſuite *ZC* ou ſon égale *Cz*, pour la viteſſe avec laquelle le vent doit frapper la voile pour faire équilibre avec l'effort ſuivant *YC*, on décrira ſur les côtés *CP*, *Cz* le parallélogramme *CzQP* dont la diagonale *CQ* marquera la viteſſe & la direction du vent.

Si on regarde, ſuivant le Principe communément reçû, l'action des Fluides comme proportionnelle au quarré de leur viteſſe, & que par le point *Z* on tire la ligne indéfinie $Z\zeta$ paralléle à la voile *NS*; l'effort du vent frappant la voile obliquement avec la viteſſe & la direction $C\zeta$, ſera le même que s'il la frappoit perpendiculairement avec la viteſſe *Cz*. Or la viteſſe du vent par rapport à la voile en repos étant $C\zeta$, ſi on mene ζq paralléle & égale à *CP* ou *zQ*, on trouvera que la viteſſe & la direction réelle du vent doit être la ligne *Cq*.

D'où il s'enſuit en général, que menant par le point *Q* la ligne indéfinie *Qnq* paralléle à *NS*, la viteſſe & la direction

direction du vent peut être représentée dans le cas précedent par telle ligne *Cq* qu'on voudra, terminée à l'indéfinie *Qnq*.

De-là se tire aisément la solution de ce Problême. *La vitesse & la direction de l'eau suivant* CT *étant donnée avec la vitesse & la direction* Cq *du vent, & la position* NS *de la voile, trouver la direction & la vitesse* CP *du vaisseau.*

Pour cela, on menera d'abord *qn* (Figure 122) paralléle à *NS*, sur laquelle on abaissera la perpendiculaire *Cn* : *nC* sera la direction de l'effort résultant de la résistance de l'eau. Cela posé, on trouvera fort aisément la direction *Cπ* suivant laquelle le parallélogramme doit choquer le Fluide, & par le point *T* on menera *Tϖ* paralléle à *Cπ*. On tirera ensuite la ligne *TQ* dont la posirion soit telle, que menant *mi* paralléle à *Cn*, *Tm* soit à *mi* comme la vitesse *PT* du Fluide est à celle que le vent doit avoir pour lui résister suivant *Cn* (le rapport de ces vitesses est connu par l'Expérience, quoique l'une & l'autre vitesse soit inconnue). Par le point *Q* où cette ligne *TQ* rencontre *Qn*, on menera *QP* paralléle à *nC*. Tirant enfin *CP*, je dis que cette ligne *CP* exprimera la vitesse & sera la direction du vaisseau.

PROBLÊME II.

345. *Les mêmes choses étant posées que dans le Problême précedent, avec cette condition de plus, que le parallélogramme soit pesant, on demande la courbe qu'il doit décrire.*

Ce Problême se résoudra entiérement par les mêmes Principes que le précedent ; il est aisé d'appliquer ici ces Principes, par le moyen desquels toute la difficulté se réduit au cas où le Fluide seroit en repos. De-là & de l'*article* 318. il s'ensuit que la construction de la courbe est possible au moins en deux cas, savoir quand $\varphi u = \varphi g$, & quand $\varphi u = uu$. On pourroit aussi résoudre le Problême par le calcul, mais il est si long & si compliqué, que nous avons cru le devoir supprimer.

COROLLAIRE.

346. Si la résistance du Fluide & la pesanteur agissent l'une & l'autre suivant la même ligne *CA* (Fig. 118) perpendiculaire au côté *HB*, la courbe est aisée à construire, quelle que soit la Loi de la résistance. Car le centre *C* décriroit alors dans le Fluide en repos une ligne droite, à chaque point de laquelle on peut déterminer aisément sa vitesse. Donc &c.

SCOLIE.

347. Si dans un milieu composé de couches parallèles de différentes densités, & qui se meuvent toutes uniformément suivant *CP*, (Fig. 123) un parallélogramme rectangle *BFGH* est situé de maniére, que l'une de ses diagonales *FH* soit paralléle aux tranches du Fluide ; & qu'on lui imprime une vitesse *CE*, telle, qu'en joignant *PE*, cette ligne *PE* soit paralléle à la diagonale *CG*, il sera facile de trouver la courbe décrite par le centre *C*.

Car toute la difficulté se réduit à trouver la vitesse que le centre C auroit aux différens points de la ligne CG qu'il décriroit (*art.* 337.) dans le Fluide en repos.

PROBLÊME III.

348. *Trouver la courbe que décrit un Cercle sans pesanteur, poussé suivant une direction quelconque dans un Fluide qui se meut d'une vitesse uniforme.*

PREMIERE SOLUTION.

La solution de ce Problême est semblable à celle du Problême I. (*art.* 338.) & est même encore plus facile.

II. SOLUTION.

Si on veut résoudre ce Problême par le calcul, on supposera que CF (Fig. 124) soit la direction du Cercle, CP celle du Fluide. Ayant achevé le parallélogramme $CPMO$, la vitesse respective & la direction du Fluide contre le Cercle sera OC. Menant donc RCS perpendiculaire à OC, il est clair que le demi-Cercle entier SAR sera exposé à l'action du Fluide : d'où il s'ensuit que CY sera la direction de la résistance. A l'égard de la valeur de cette résistance, on sait qu'elle est les $\frac{2}{3}$ de celle que feroit le Fluide au diamétre RCS, s'il venoit le frapper perpendiculairement avec la vitesse OD. Donc appellant f l'effort que feroit le Fluide contre le diamétre RCS,

s'il venoit le frapper perpendiculairement avec une viteſſe donnée g, on aura $\frac{2f\varphi(OC)}{3\varphi g}$ pour la quantité de l'effort ſuivant CY.

Soit à préſent $CA = a$, $AE = z$, CA étant perpendiculaire à CP. Si on mene de plus BCb perpendiculaire à CE, & du point P la ligne PG perpendiculaire à CM, & qu'on appelle e la viteſſe du Fluide, & u celle du Cercle, on aura $PG = \frac{ea}{\sqrt{[aa+zz]}}$, $MG = u - \frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}}$, PM ou OC que j'appellerai $V = \sqrt{[\frac{eeaa}{aa+zz} + (u - \frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}})^2]}$, l'effort ſuivant $CY = \frac{2}{3} \cdot \frac{f\varphi V}{\varphi g}$; l'effort qui en réſulte ſuivant CT dans la direction de $CE = \frac{2f\varphi V}{3\varphi g \cdot V} \times (u - \frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}})$; & l'effort qui en réſulte ſuivant CZ perpendiculaire à $CE = \frac{2f\varphi V}{3\varphi g \cdot V} \times \frac{ea}{\sqrt{[aa+zz]}}$.

On aura donc les deux Equations

$$\frac{2f\varphi V \cdot ea \times dx^2 \cdot (aa+zz)}{3V\varphi g \cdot \sqrt{[aa+zz]} \cdot aauu} = \frac{mdxdz}{\sqrt{[aa+zz]}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

& $\frac{2f\varphi V}{3V\varphi g} \times (u - \frac{ez}{\sqrt{[aa+zz]}}) \times \frac{dx\sqrt{[aa+zz]}}{a} = -mdu \ldots (7)$,

d'où l'on tire

$\frac{-du}{uu}\sqrt{[aa+zz]} + \frac{zdz}{u\sqrt{[aa+zz]}} = \frac{dz}{e}$, dont l'intégrale eſt $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u} - \frac{\sqrt{[aa+hh]}}{g} = \frac{z-b}{e}$; donc V eſt égal à

$\sqrt{}[aa+(\frac{e\sqrt{}[aa+bb]}{g}-h)^2:(\frac{z-b}{e}+\frac{\sqrt{}[aa+bb]}{g})$. Mettant ces valeurs de u & de V dans l'Equation (6), on aura

$$\frac{2fdx}{3m\varphi g}\times\varphi(\sqrt{}[aa+(\frac{e\sqrt{}[aa+bb]}{g}-h)^2]:[\frac{z-b}{e}+\frac{\sqrt{}[aa+bb]}{g}]) = \frac{adz}{e}\times\sqrt{}[aa+(\frac{e\sqrt{}[aa+bb]}{g}-h)^2]:(\frac{z-b}{e}+\frac{\sqrt{}[aa+bb]}{g})^2 \ldots (8),$$

d'où l'on voit que la construction de la courbe est possible.

COROLLAIRE I.

349. Si on suppose la résistance proportionnelle à une puissance quelconque n de la vitesse, & qu'on fasse pour abreger $\frac{\sqrt{}[aa+bb]}{g}-\frac{h}{e}=\frac{\alpha}{e}$, & $aa+\alpha\alpha=\epsilon\epsilon$, l'Equation générale (8) aura pour intégrale

$$\frac{2fx\epsilon^{n-1}}{3mg^n}=\frac{a}{n-2}[(\frac{z-\alpha}{e})^{n-2}-(\frac{\sqrt{}[aa+bb]}{g})^{n-2}];\text{ donc}$$

$$z \text{ ou } \frac{ady}{dx}=e[(n-2).\frac{2fx\epsilon^{n-1}}{3mag^n}+(\frac{\sqrt{}[aa+bb]}{g})^{n-2}]^{\frac{1}{n-2}}+\alpha.$$

D'où l'on voit 1°. que *la courbe est toujours Geométrique excepté dans le cas de* n = 1, 2°. qu'en particulier *elle est une parabole, si* n = 3, *& une Logarithmique, si* n = 1.

Il est visible aussi, que ce qui a été dit (*art.* 339.) s'applique encore ici, & se tire de même de la premiére solution.

COROL. II.

350. Si on suppose que la vitesse e soit différente dans

les différentes couches du Fluide, & que le Cercle soit très-petit, ou au moins tel que la vitesse du Fluide puisse être regardée comme constante dans un espace égal au diamétre du Cercle, on aura comme ci-dessus (*art.* 348. *seconde Solution*)

$\frac{-du\sqrt{[aa+zz]}}{uu} + \frac{zdz}{u\sqrt{[aa+zz]}} = \frac{dz}{e}$, dont l'intégrale ($e$ étant regardée comme variable) est

$$\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u} = \int\frac{dz}{e},$$

en imaginant que $\frac{\int dz}{e}$ devienne $\frac{\sqrt{[aa+bb]}}{g}$ lorsque $x = o$.

Supposons présentement que la résistance soit proportionnelle à la vitesse, c'est-à-dire que $\varphi V = V$, on aura

$$\frac{2fdx}{3mg}\times(\int\frac{dz}{e})^2 = \frac{adz}{e},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{2fx}{3mag} = \frac{g}{\sqrt{[aa+bb]}} - \frac{1}{\int\frac{dz}{e}};$$

$$\text{donc } dz = \frac{2fedx}{3mag\,(\frac{g}{\sqrt{[aa+bb]}} - \frac{2fx}{3mag})^2}.$$

Or comme e ne peut être qu'une fonction de x, il s'ensuit que *la courbe est constructible lorsque* φ V = V.

Il est à remarquer qu'on ne peut se servir ici du Principe de la premiére Solution (*article* 348.) parce qu'en général ce Principe n'est d'usage que quand la vitesse du Fluide est uniforme.

En général, ſoit $\varphi V = \alpha V^n + \beta V^m$; ſi l'on met pour $\frac{V[aa+zz]}{n}$ ſa valeur $\int \frac{dz}{e}$ dans l'Equation (6) de l'*article* 348, & qu'on faſſe

$$z - e\int \frac{dz}{e} = t, \text{ on aura}$$

$$d\left(\frac{dt}{de}\right)\left[\frac{dt}{de}\right]^{n-3} = \frac{2fdx}{3a(\alpha g^n + \beta g^m)} \times$$

$$\left(\alpha[aa+tt]^{\frac{n-1}{2}} + \beta[aa+tt]^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{dt}{de}\right)^{n-m} \ldots\ldots (9).$$

Cela poſé, ſoit 1°. $e = \gamma + x$, on aura $de = dx$; & faiſant $dx = pdt$, on trouve que les indéterminées ſont ſéparables dans l'Equation (9) précedente, généralement lorſque $\beta = 0$, & de plus lorſque $m = 1$, α & β étant deux conſtantes quelconques.

2°. Soit $e = \gamma + \delta c^{\pm x}$, on trouve encore que l'Equation précedente (9) eſt conſtructible lorſque $\beta = 0$, & $n = 2$.

COROL. III.

351. Si la denſité du Fluide eſt variable & que le Cercle ſoit très-petit, ou au moins tel que la denſité puiſſe être regardée comme conſtante dans un eſpace égal au diamétre du Cercle, on pourra conſtruire la courbe dans toutes les hypotheſes poſſibles de réſiſtance, en ſe ſervant de l'une ou l'autre des deux Méthodes de l'*article* 348, & regardant ſeulement la réſiſtance f, non plus comme conſtante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x.

Enfin, si la vitesse & la densité sont supposées variables l'une & l'autre, on pourra encore construire la courbe, au moins dans le cas où $\varphi V = V$, comme on a déja fait (*article* 350.) pour le cas de la vitesse variable, & de la densité constante.

Si $e = \gamma + X$ & $f = \frac{a\,dX}{dx}$, X étant une fonction de x, on pourra construire la courbe lorsque $\beta = 0$, & de plus lorsque $m = 1$. On peut encore la construire lorsque $\beta = 0$, $n = 2$ & $e = \gamma + \delta c^{\pm \int f dx}$.

Remarque I.

352. Si la figure donnée au lieu d'être un Cercle étoit une Sphére, les Problêmes précedens ne seroient pas plus difficiles à résoudre; tout dépend d'une détermination exacte de la direction & de la quantité de la résistance. Pour cela on fera passer le Cercle *CAB* (Fig. 125) par les lignes *CE* & *CP*, & après avoir fait une construction semblable à celle de l'*article* 348, (*seconde Solution*) on verra que le diamétre *QCY* est la ligne suivant laquelle se fait la direction de la résistance. Car ayant imaginé un autre demi-Cercle quelconque *QSY*, & par un de ses points *c* pris à volonté, ayant tiré *cp* égale & paralléle à *CP*, *cm* égale & paralléle à *CM*, il est clair que *co* sera égale & paralléle à *CO* & dans le plan du demi-Cercle *QSY*. Donc *co* est paralléle à la tangente qui passeroit par le point de milieu *S* du demi-Cercle *QSY*. D'où il s'ensuit que la demi-Sphére *SQR* est exposée à l'action du

du Fluide. Donc CY sera, comme dans le cas du Cercle, la direction de la résistance.

Le reste du calcul sera le même que pour le Cercle, à quelques coefficiens près.

REMARQUE II.

353. Lorsque la vitesse du Fluide est supposée variable, il y a une remarque importante à faire sur la maniére dont on détermine la direction de la résistance. Comme l'on suppose le Cercle très-petit, on prend cette direction pour la même qu'elle seroit, si la vitesse du Fluide étoit uniforme dans un espace égal au diamétre du Cercle, & qu'elle fût égale à la vitesse du filet dont la direction passe par le centre du Cercle. Cette supposition est fort éloignée de la vérité, lorsque la vitesse & la direction du Cercle est à peu près la même que celle du Fluide. Car soient AB, ac (Figure 126) les vitesses du Fluide en A, a, & que les lignes égales & paralléles AD, ad, représentent la direction du centre C, l'angle BAD étant très-petit ; il est clair que DB, dc sont les directions avec lesquelles les points A, a, sont censés frappés par le Fluide. Or quoique la différence de AB & de ac soit infiniment petite, cependant comme elle n'est pas infiniment petite par rapport à BD ou dc, les lignes DB, dc ne peuvent être regardées comme paralléles.

Cette observation n'empêche pas cependant que la solution du Corol. II. (*article* 350.) ne puisse passer pour exacte. Car lorsque la vitesse & la direction du Cercle sont

à peu près les mêmes que la viteſſe & la direction du Fluide, le Cercle ne décrit plus de courbe ſenſible.

PROBLÊME IV.

354. *Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art. 348, *avec cette condition de plus, que le Cercle ſoit peſant, & que la peſanteur agiſſe dans le plan du Cercle, on demande la courbe qu'il doit décrire.*

PREMIERE SOLUTION.

En appliquant ici les Principes expliqués & démontrés ci-deſſus, on voit qu'il n'eſt queſtion que de trouver la trajectoire décrite par un Corps peſant dans un Fluide en repos. Ce Problême a été réſolu par Meſſieurs *Bernoulli*, *Herman*, *Euler* &c. * & nous en donnerons auſſi plus bas une Solution fort ſimple.

II. SOLUTION.

Comme la peſanteur doit ſe combiner ici avec la réſiſtance du Fluide, ſi on retranche la quantité $\frac{pzdxx}{\sqrt{[aa+zz]}} \times \frac{aa+zz}{aaun}$ du premier membre de l'Equation (6) (*art.* 348.) & la quantité pdx du premier membre de l'Equation (7), on aura deux nouvelles Equations que j'appellerai (10) & (11) par le moyen deſquelles on réſoudra le Problême de la maniére ſuivante. On comparera d'abord les deux

* *Act. Erud.* 1719. Euler *Mechan.*

valeurs de $\frac{2 f d x \varphi V}{3 \varphi g}$ tirées de ces deux Equations, ce qui donnera, en ſuppoſant $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u} = q$,

$$dx = maa \cdot \frac{dz - edq}{q(peqq - pzq)}.$$

Comparant cette valeur de dx avec celle qu'on tire de l'Equation (10), on aura

$$\frac{2 f e a \varphi V}{3 V \varphi g} \times (dz - edq) = peqdz - pzedq \ldots\ldots (12).$$

Cette Equation eſt d'elle-même toute ſéparée, ſi $\varphi V = V$. En général, ſi on ſe rappelle que $V = \frac{\sqrt{[aa + (z - eq)^2]}}{q}$, & qu'on faſſe $z - eq = t$, on trouvera

$$\frac{2 f a \varphi V}{3 p \varphi g} \cdot \frac{V dt}{aa + tt} = d\left(\frac{Vt}{\sqrt{[aa+tt]}}\right),$$

d'où l'on voit que non-ſeulement $\varphi V = V^n$; mais encore $\varphi V = V^n + A$, & $\varphi V = \log. V$, donne une conſtruction poſſible.

REMARQUE I.

355. Je n'ai donné la ſeconde Solution qui précede, que parce qu'elle renferme comme un cas particulier le Problême des trajectoires dans les milieux réſiſtans, & que de plus par la Méthode dont je me ſuis ſervi, on voit que le Problême peut ſe réſoudre encore dans des cas dont Meſſieurs *Bernoulli*, *Herman*, *Euler*, n'ont pas fait mention. Nous obſerverons cependant que la ſolution précedente ſemble d'abord ne pouvoir s'appliquer au cas

où le Fluide eſt en repos. Car e étant alors $= 0$, l'Equation (12) devient identique, & ne peut conduire à rien.

Mais ſi on compare la valeur de $dx = -\frac{maadz}{pzqq}$ avec ſa valeur tirée de l'Equation (11), on aura en mettant pour q ſa valeur $\frac{\sqrt{[aa+zz]}}{u}$,

$$\frac{2f\varphi u \,.\, audz}{3p\varphi g \,.\, (aa+zz)} = d\left(\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}}\right).$$

REMARQUE II.

Sur les cas où on peut conſtruire les trajectoires dans les milieux réſiſtans.

356. L'Equation $\frac{2f\varphi u \,.\, audz}{3p\varphi g \,.\, (aa+zz)} = d\left(\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}}\right)$ eſt évidemment conſtructible non-ſeulement lorſque $\varphi u = u^n$, ce qui eſt le ſeul cas qu'on ait examiné juſqu'à préſent, mais encore lorſque $\varphi u = u^n + A$, & lorſque $\varphi u = A + fLu$, A & f exprimant des nombres quelconques.

Il y a encore quelques autres cas où cette Equation peut ſe conſtruire. Comme le détail de ces cas peut intéreſſer les Geométres, je vais expoſer la maniére de les trouver.

Je remarque d'abord que $\frac{adz}{aa+zz}$ eſt l'élément d'un angle dont a eſt le rayon & z la tangente, & que $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}}$ eſt le Sinus de ce même angle. De-là il eſt aiſé de conclu-

re, qu'en ſuppoſant $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}} = \sqrt{[1-xx]}$, on fera évanouir les radicaux de l'Equation différentielle propoſée ; on aura donc, en négligeant ou ſupprimant les coefficiens conſtans, $u\varphi u dx = du - xxdu - xudx$. Il s'agit de déterminer φu à être telle que cette Equation puiſſe être ſéparée.

Soit en premier lieu $\varphi u = \frac{auu + Ru + b}{u}$, & prenons $u = k + fx^p + mx^n z$, k, f, p, m, n, étant des conſtantes inconnues ; nous aurons la transformée ſuivante

$$\left.\begin{array}{lll} akkdx & +2akfx^p dx & +affx^{2p}dx \\ +kRdx & +fRx^p dx & -pfx^{p-1}dx \\ +bdx & +kxdx & +pfx^{p+1}dx \\ & & +fx^{p+1}dx \end{array}\right\} - X'zdx + Xz^2dx + \xi dx.$$

dans laquelle X', X, ξ, marquent des fonctions de x. Or il eſt clair que cette Equation pourra être conſtruite, ſi on peut déterminer les coefficiens k, f, p, à être tels que le premier membre de l'égalité ſoit zero. C'eſt à quoi on parviendra en ſuppoſant $p = 1$, $akk + kR + b - pf = 0$, $2akf + fR + k = 0$, $aff + pf + f = 0$. Mais comme des trois inconnues k, f, p, l'une $p = 1$ eſt donnée (*hyp.*) & qu'on a outre cela trois Equations pour déterminer les deux autres ; il s'enſuit que l'Equation propoſée n'eſt intégrable ou conſtructible lorſque $\varphi u = \frac{auu + Ru + b}{u}$, que quand il y a, outre cela, entre les coefficiens a, R, b, un certain rapport.

Par exemple, ſi $R = 0$, on trouve que b doit

être $= -\frac{1}{a}$, & l'on aura $k = 0, f = b$.

En général, soit $\varphi u = au^{p} + R + bu^{-p}$, & l'on aura $(au^{2p} + Ru^{p} + b) . dx = u^{p-1} du - xxu^{p-1} du - u^{p} xdx$. Equation qui est précisément de la même forme, que celle que nous venons d'examiner dans le cas où $\varphi u = \frac{auu + Ru + b}{u}$. Donc lorsque $\varphi u = au^{p} + R + bu^{-p}$, l'Equation peut encore se construire s'il y a entre les coefficiens a, R, b certaines conditions, p étant d'ailleurs un nombre quelconque.

Je suppose à présent que l'Equation $u\varphi udx = du - xxdu - uxdx$ ait été divisée par u, & que φu soit égal à $a\ (Lu)^2 + R . Lu + b$; en prenant $Lu = v$, j'aurai $(avv + Rv + b) . dx = dv - xxdv - xdx$, qui ne différe de l'Equation que nous venons d'examiner, que par le dernier terme. En faisant les mêmes transformations & les mêmes raisonnemens, on verra que le terme $fx^{p+1}dx$ s'effacera dans la transformée, & qu'on aura $+ xdx$ au lieu de $xkdx$, & l'on trouve encore que l'Equation est constructible, si $p = 1, akk + kR + b - pf = 0, 2akf + fR + 1 = 0, aff + pf = 0$.

Nous trouvons donc par notre Méthode, que la trajectoire dans un milieu résistant est toujours constructible 1°. lorsque $\varphi u = u^{n}$, 2°. lorsque $\varphi u = A + u^{n}$, 3°. lorsque $\varphi u = A + f . Lu$, A, f, & n étant des nombres quelconques, 4°. lorsque $\varphi u = au^{p} + R + bu^{-p}$, 5°. lorsque $\varphi u = a (Lu)^2 + R . Lu + b$, pourvû qu'en ces deux der-

niers cas il y ait un certain rapport entre les coefficiens a, R, b.

Je ne prétends pas, au reste, qu'il n'y ait que ces seuls cas où la trajectoire soit constructible ; mais je laisse à ceux qui aiment ces sortes de calculs à pousser plus loin leurs recherches là-dessus.

REMARQUE III.

Où l'on donne une Méthode fort simple pour trouver les trajectoires dans les milieux résistans.

357. Soit AP (Fig. 127) $= x, PM = y, MN = ds$, $dy = \frac{zdx}{a}$: la partie de la pesanteur qui agit suivant MN est $\frac{pa}{\sqrt{[aa+zz]}}$, dont il faut retrancher $f\varphi u$, & la force qui agit suivant NO est $\frac{pz}{\sqrt{[aa+zz]}}$: ces deux forces sont entr'elles comme les espaces qu'elles font parcourir. Or l'espace que fait parcourir la premiére, est $\frac{dsdu}{u}$, & l'espace que fait parcourir la seconde, est $NO = -\frac{adsdz}{aa+zz}$; on a donc

$$\frac{pz}{\sqrt{[aa+zz]}} : \frac{pa}{\sqrt{[aa+zz]}} - f\varphi u :: \frac{-adz}{(aa+zz)} : \frac{du}{u};$$ d'où l'on tire $pd\left(\frac{uz}{\sqrt{[aa+zz]}}\right) = \frac{af u\varphi u dz}{aa+zz}$.

REMARQUE IV.

358. Les deux Méthodes que nous avons données dans l'*article* 354. s'appliquent aussi au cas où la figure donnée est une Sphére au lieu d'être un Cercle. Si la direction de la Sphére & du Fluide ne sont pas dans le même plan vertical dans lequel la pesanteur agit, alors, comme les calculs seroient trop longs par la seconde Méthode, on ne se servira que de la premiére.

REMARQUE V.

359. Si un Cercle ou une Sphére, pesans ou non, passent du vuide dans un Fluide mû uniformément, ou d'un Fluide mû uniformément dans un autre Fluide, mû uniformément avec la même vitesse & la même direction que le premier; il ne s'agit, pour trouver la courbe qu'ils doivent décrire, que de savoir trouver cette courbe, lorsque chacun des Fluides est en repos. Or c'est de quoi nous avons traité fort au long ci-dessus.

Si les deux Fluides étoient mûs chacun uniformément, mais avec différentes vitesses, dans ce cas voici comment il faudroit s'y prendre.

Que la ligne *CE* (Fig. 128) représente la vitesse & la direction du centre *C*, *CP* la vitesse de l'un des Fluides, *CF* celle de l'autre; il est évident que *EP*, *EF* seront les directions suivant lesquelles chacun des Fluides fera impression sur le Cercle. Or si l'action d'un des Fluides suivant *EP* faisoit décrire au centre *C* la petite ligne *Ea*,

&

& que l'action de l'autre Fluide suivant *EF* fit décrire au centre *C* la ligne *Eb*, on verroit, après avoir achevé le petit parallélogramme *Eadb*, que *Cd* seroit la ligne décrite par le centre *C*, & ainsi du reste. Donc si on suppose que le Fluide dont la vitesse est *CP* soit en repos, que *PE* soit la direction & la vitesse initiale du centre *C*, *PF* la vitesse de l'autre Fluide, il n'y a qu'à chercher la courbe que décriroit dans ce cas le centre *C*, & faire ensuite mouvoir uniformément cette courbe avec une vitesse égale à *CP*. On aura par ce moyen la trajectoire cherchée.

Ou bien on peut supposer que la direction & la vitesse initiale du centre *C* soient *EF*, que le Fluide dont *CF* marquoit la vitesse soit en repos, & que l'autre se meuve suivant *FP*, & après avoir trouvé la courbe que le centre *C* décriroit dans ce cas, faire mouvoir ensuite uniformément cette courbe avec une vitesse égale à *CF*, on auroit encore par ce moyen la trajectoire qu'on cherche.

Ainsi de ces trois courbes, savoir la courbe cherchée *CO*, (Fig. 129) la trajectoire *CB* que le centre *C* décriroit dans le cas où *PE* seroit sa direction & sa vitesse initiale, & la trajectoire *CQ* qu'il décriroit, si *FE* étoit sa direction & sa vitesse initiale, de ces trois courbes, dis-je, l'une étant donnée à volonté, on peut toujours trouver les deux autres. On peut remarquer de plus, que si on mene une ligne quelconque *OBQ* parallèle à *CF*, *OB* sera toujours à *OQ* :: *CP* . *CF*; d'où on peut conclure

Zz

en paſſant, que les tangentes aux points O, B, Q, aboutiroient toutes trois au même point.

Pour trouver l'Equation des courbes CB, CQ, on peut ſe ſervir d'une Méthode ſemblable à celle que j'ai donnée dans le Chapitre précedent, où j'ai traité de la Réfraction.

Soit EaM (Fig. 130) l'Arc enfoncé dans un inſtant quelconque, CA la direction du centre C, $CR = e$, la viteſſe qui reſte à l'un des Fluides, par exemple, au Fluide ſupérieur, RQ paralléle à CA & égale à la viteſſe du centre C que je nomme u, f la réſiſtance que feroit le Fluide inférieur à la ligne Ca, ſi ce Fluide la frappoit perpendiculairement avec une viteſſe donnée g, f la réſiſtance du Fluide ſupérieur dans les mêmes circonſtances; ſi on mene les lignes BCb, Ee, MF perpendiculaires à CA, & $\beta C\epsilon$, Ee, Mf perpendiculaires à $C\alpha$, on aura $\frac{f\varphi u}{\varphi g} \times \frac{CF^3 - Ce^3}{3CA^3}$ pour l'expreſſion de l'effort ſuivant Cb, & $\frac{f\varphi(CQ)}{\varphi g} \times \frac{Cf^3 - Ce^3}{3CA^3}$ pour celle de l'effort ſuivant $C\beta$. On trouvera avec la même facilité les efforts ſuivant CN & Cn, & réduiſant enſuite par la décompoſition ces quatre efforts à deux, l'un ſuivant CN, l'autre ſuivant Cb ou CB, on parviendra aiſément à deux Equations, dont les trois inconnues ſeront les coordonnées & la viteſſe à chaque point de la courbe; faiſant évanouir l'inconnue u qui exprime la viteſſe, on aura l'Equation de la courbe, mais à la vérité fort compliquée de différentielles.

Au reste, nous avons ici une chose assez singuliére à remarquer. On a vu dans le Chapitre sur la réfraction, que la courbe décrite par le centre *C* durant l'enfoncement du Cercle, étoit réellement composée de deux courbes différentes, à Equations différentes, dont le centre *C* décrivoit la premiére tant que le point *E*, l'une des extrêmités de l'Arc enfoncé *EaM*, étoit sur le quart de Cercle *AB*. Ici nous voyons que le centre *C* peut en décrire jusqu'à quatre & même cinq. La premiére, lorsque le point *E* est à la fois sur les quarts de Cercle *AB*, $\alpha\beta$; la seconde, lorsqu'il n'est plus que sur le quart de Cercle *AB*; la troisiéme, lorsqu'il n'est plus ni sur l'un, ni sur l'autre, & tant que le point *M* n'a pas atteint le point *b*. La quatriéme enfin, pendant le tems que le point *M* met à parcourir l'Arc *bϐ*. Après quoi le centre *C* ne fait plus que se mouvoir en ligne droite, à moins qu'on ne suppose que le Fluide inférieur soit en mouvement, auquel cas il décrira une cinquiéme ligne courbe différente des quatre premiéres.

Dans le cas où les deux Fluides ont une égale vitesse, si l'angle *CPE* (Figure 128) est droit, les trajectoires *CB*, *CQ*, (Fig. 129) qui se confondent alors, deviennent des lignes droites. Ainsi pour construire la courbe *CQS*, il n'est question que de savoir trouver la vitesse du centre *C* aux différens points de ces lignes.

REMARQUE VI.

360. Il est presque inutile d'avertir que par les Métho-

des expliquées dans ce Chapitre, il est facile d'avoir l'Equation de la courbe que décriroit un Navire de figure rectangle ou circulaire, poussé par le vent suivant une direction quelconque dans un Fluide qui se mût aussi suivant telle direction qu'on voudroit. La difficulté ne peut être que dans le calcul. Nous remarquerons, au reste, qu'on peut rarement réduire ce Problême à celui d'un Navire poussé par le vent dans un Fluide en repos.

Soit par exemple *CSK* (Figure 131) un Navire de figure circulaire, *CD* sa direction & sa vitesse initiale, *CP* la direction & la vitesse du Fluide. Si on joint *PD* & qu'on mene *CG* égale & paralléle à *PD*, *CG* sera la vitesse & la direction qu'on devroit donner au Navire dans le Fluide en repos. Soit la voile *NCS* perpendiculaire à *CG*, *CF* la vitesse absolue du vent, il est évident que *DF* exprimera la vitesse respective du vent par rapport au vaisseau, & *FH* son action sur la voile, lorsque le vaisseau est mû suivant *CD*, au lieu que si le vaisseau étoit mû suivant *CG*, l'action du vent sur la voile seroit exprimée par *FG*. Donc &c.

Si l'angle *CPD* étoit droit, alors *FH* seroit = *FG*, & le Problême se réduiroit au cas du Fluide en repos.

§. IV.

Du mouvement d'une figure quelconque dans un Fluide.

PROBLÊME I.

361. *On suppose qu'à tous les points* P, Q, R, &c.

(Fig. 132) *d'une figure quelconque* PQRO, *ſoient appliquées des puiſſances dont les valeurs & les directions* PS, QT, RF, &c. *ſoient données ; on demande la force ou puiſſance unique qui réſulte de toutes celles-là.*

On décompoſera chacune des puiſſances en deux autres, dont l'une ſoit paralléle à une ligne *AB* donnée de poſition, & l'autre ſoit paralléle à une autre ligne *AC* auſſi donnée de poſition. On cherchera la force réſultante du concours d'action des puiſſances paralléles à *AB*, ce qui ſe peut trouver très-aiſément par les Principes de Statique ; on cherchera de même la force réſultante du concours d'action des puiſſances paralléles à *AC*; & la force réſultante du concours de ces deux nouvelles forces, ſera la force qu'on cherche.

Ce Problême a déja été réſolu par M. *Bernoulli* dans ſa *Manœuvre des vaiſſeaux.*

PROBLÊME II.

*362. Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art. 360. *trouver le mouvement que la figure doit prendre.*

Puiſque (*Probl. préced.*) toutes les puiſſances ont été réduites à une ſeule, dont je ſuppoſe que la direction ſoit *AQ*, (Figure 133) il s'enſuit que le mouvement de la figure doit être le même, que ſi elle étoit pouſſée en *A* par une puiſſance donnée ſuivant une direction *AQ*. Or il eſt clair par les *art. 64. & 138.* du *Traité de Dynamique*, que le centre de gravité *G* de la figure doit ſe mouvoir ſuivant *GO* paralléle à *AQ* avec une viteſſe *u*

telle, que $QRASQ \times u =$ soit à la puissance appliquée en A; que de plus, la figure doit en même tems tourner autour de son centre G de maniére, qu'en menant la perpendiculaire GT, à AQ, & nommant α la vitesse du point T pour tourner autour de G, A la puissance appliquée en A, p la somme des produits des parties de la figure par le quarré de leurs distances à G, l'on ait $A \cdot GT = \frac{\alpha p}{GT}$: par cette condition, on déterminera l'inconnue α. *Ce Q. F. Trouver.*

PROBLÊME III.

363. *Trouver les Loix du mouvement d'une figure quelconque* STMV, (Fig. 134) *qui se meut dans un Fluide d'une densité constante ou variable, & dont les différentes particules se meuvent aussi avec une vitesse uniforme ou variable.*

1°. Il est certain que si on nomme u la vitesse du centre de gravité en un instant quelconque, α la vitesse avec laquelle un point donné de la figure tourne dans ce même instant autour du centre de gravité, on aura facilement la vitesse absolue d'un point quelconque M de la figure, puisque cette vitesse est composée d'une vitesse égale & paralléle à celle du centre G, & de la vitesse de rotation du point M autour du centre G, qui est connue facilement par la vitesse α.

2°. Soit donc MQ la vitesse absolue d'un point quelconque M de la figure, MN la vitesse du point du Fluide

qui répond à M, on regardera la vitesse MN, comme composée de MQ & de MP, & il est évident qu'en appellant δ la densité du Fluide en M, on trouvera que la force qui est appliquée perpendiculairement au point M de la figure, est $\frac{\delta . mr^2 . \varphi(MP)}{Mm}$.

3°. Connoissant ainsi la valeur & la direction de chacune des forces appliquées aux points de la figure, on connoîtra la valeur & la direction de la force unique qui en résulte à chaque instant. Ainsi supposant que dans un instant donné, AQ (Fig. 133) soit la direction de cette force & F sa valeur; il est clair (*art.* 361.) qu'en nommant m la masse de la figure, dt l'instant proposé & supposant que GO paralléle à AQ, soit le petit chemin du centre G en vertu de la force φ, on aura $Fdt^2 = m . GO$, & que $\frac{F . GT^2 . dt^2}{p .}$ sera le chemin que fera le point T autour du centre G.

Par-là on trouvera non-seulement la courbe que décrit le centre G, mais encore sa vitesse aux différens points de cette courbe, & la vitesse avec laquelle il tourne autour de son centre. Le calcul sera plus ou moins compliqué, selon que la figure sera plus ou moins simple. Il suffit ici d'en donner, comme nous venons de faire, l'esprit & la méthode.

REMARQUE I.

364. Outre l'effort que fait le Fluide perpendiculaire-

ment à la figure au point M, & dont nous venons de calculer l'effort, il agit encore, lorsque la circonférence de la figure n'est pas parfaitement Mathematique, par son effort suivant Mm. Pour calculer la valeur de cet effort, il faut observer, que $\frac{MP \,.\, Mr}{Mm}$ est la vitesse du Fluide suivant mM; que $\frac{MQ \,.\, Mn}{Mm}$ est la vitesse du point M de la figure dans la direction mM, & enfin que $\delta \,.\, Mm \times (\frac{MP \,.\, Mr \pm MQ \,.\, Mn}{Mm})^2$ est la force appliquée en M. On aura de même la force appliquée à tous les autres points de la figure; & par les Méthodes expliquées dans les Problêmes précedens (*art.* 361, 362 & 363), on trouvera le nouveau Mouvement imprimé à la figure par la force qui résulte du concours de celles-là.

REMARQUE II.

365. Il est évident que par les mêmes Principes on trouvera le mouvement d'une figure quelconque qui passe d'un Fluide dans un autre. Comme les calculs en sont extrêmement compliqués, & que j'ai réduit la question à une pure question d'Analyse, par les Principes que je viens d'exposer dans la solution des Problêmes précedens, je crois qu'il est inutile de m'étendre sur ce sujet. On voit seulement que la solution est beaucoup plus composée & dépend d'un nombre beaucoup plus grand d'élémens, qu'on ne paroît l'avoir crû jusqu'à présent: on voit

voit auſſi combien on doit être réſervé à avancer ſur la réfraction des Corps ſolides des propoſitions générales, par exemple, celle-ci, *qu'un Corps s'approche toujours de la perpendiculaire quand le milieu où il entre réſiſte moins que le premier & au contraire :* on ſent aſſez qu'il faudroit avoir fait, pour ainſi dire, l'énumération de toutes les figures poſſibles, pour avancer en général cette propoſition. Il eſt même aiſé de faire voir dans un exemple particulier, que cette propoſition eſt fauſſe. Car nous avons vû ci-deſſus (*article* 311.) qu'un parallélogramme qui ſe meut dans un ſeul & même Fluide, décrit dans ce Fluide une courbe ſouvent concave vers la perpendiculaire. Or qu'on ſuppoſe que ce parallélogramme paſſe du Fluide où il ſe meut, dans un autre qui en différe infiniment peu, mais qui pourtant réſiſte davantage; la courbe qu'il décrira ne changera qu'infiniment peu de nature, & ne ceſſera point par conſéquent d'être concave vers la perpendiculaire.

REMARQUE III.

366. L'Illuſtre *Barrow* dans ſes Leçons Optiques, Lec. 1. a donné d'après le P. *Maignan*, Minime, une explication de la réfraction de la lumiére, qui eſt aſſez ingénieuſe, mais dont on apperçoit bien-tôt le défaut, pour peu qu'on faſſe uſage de tout ce que nous avons dit ci-deſſus.

Son explication conſiſte à regarder un rayon de lumiére comme un parallélogramme rectangle oblong & ſolide, tel que *ABCD* (Fig. 135) qui vient frapper la ſurface *EF* ſuivant la direction *AC*; d'où il s'enſuit que

le point *C* arrivant à la ſurface *EF* avant le point *D*, ſon mouvement eſt plus retardé que celui du point *D*, & cela dans la raiſon de la réſiſtance des deux milieux : ſelon M. *Barrow*, les points *C*, *D* décrivent deux Arcs de Cercle *Cc*, *Dd* qui ſont entr'eux en raiſon donnée, & par conſéquent auſſi leurs rayons *DN*, *CN*: or de ce que les rayons *DN*, *CN* ſont en raiſon donnée ; M. *Barrow* conclut, & fait voir que les Sinus d'incidence & de réfraction ſont en raiſon donnée. Mais c'eſt gratuitement qu'il ſuppoſe ſans le démontrer, que les points *D*, *C*, décrivent des Arcs de Cercle qui ſont entr'eux dans la raiſon des intenſités des réſiſtances, & que ces Arcs ſont touchés en *c*, *d*, par les côtés du parallélogramme.

§. V.

Obſervations ſur quelques Problêmes concernant les Fluides.

367. Le titre que j'ai donné à ce Chapitre, me permet d'inſérer ici quelques Obſervations que je crois nouvelles, ſur différens Problêmes concernant l'impulſion des Fluides.

La premiére regarde les aubes ou palettes des moulins qui tournent autour d'un point fixe, étant mues par l'eau. C'eſt un Problême qui ne me paroît pas avoir été bien réſolu juſqu'à préſent, que de trouver la force de l'impulſion de l'eau contre la partie *AB* (Fig. 136) de la palette qui entre dans l'eau, & qui eſt mûe par l'eau de *F* vers *K*. La plûpart ont regardé la viteſſe des parties de *AB*

comme ſi elle étoit la même par rapport à l'eau, ce qui eſt bien éloigné d'être véritable. Soit $CB = a$, u la viteſſe de B, $CG = x$, on aura la viteſſe de $G = \frac{ux}{a}$; & ſi g exprime la viteſſe de l'eau, & qu'on nomme BN, y, on aura pour l'impulſion de l'eau en G, $dx \times (\frac{gy}{a} - \frac{ux}{a})^2$, & $xdx . (\frac{gy}{a} - \frac{ux}{a})^2$ pour le moment de cet effort; qu'il faut intégrer pour avoir le moment total, en regardant x ſeulement comme variable. Mais il faut prendre garde à la maniére dont on intégrera ici.

Car lorſque $gy - ux$ eſt une quantité négative, l'intégrale de $xdx . \frac{(gy - ux)^2}{a^2}$ doit l'être auſſi, comme il eſt évident, puiſqu'alors l'impulſion eſt de K vers F au lieu d'être de F vers K. Cependant comme $(gy - ux)^2$ eſt toujours une quantité poſitive, l'intégrale ſeroit poſitive, ſi on la prenoit ſans précaution, ce qui jetteroit dans l'erreur. Pour l'éviter, il faut prendre d'abord l'intégrale à l'ordinaire; & voir ce qu'elle devient quand $gy - ux = 0$. Soit P l'intégrale entiére, $\mathcal{Q}$ ce qu'elle devient, lorſque $gy - ux = 0$, & $P = \mathcal{Q} + \mathrm{Q}$. On doit donc au lieu de $\mathcal{Q} + \mathrm{Q}$ avoir $\mathcal{Q} - \mathrm{Q}$ pour la vraye intégrale; c'eſt-à-dire (à cauſe de $\mathrm{Q} = P - \mathcal{Q}$) que la vraye intégrale ſera $2\mathcal{Q} - P$; d'où réſulte la regle ſuivante. Prenez l'intégrale entiére P à l'ordinaire, & ſoit $\mathcal{Q}$ ce qu'elle devient quand $gy = ux$; $2\mathcal{Q} - P$ ſera l'intégrale véritable.

La force qui anime chaque particule *G* étant connue, il eſt aiſé de trouver l'accroiſſement de viteſſe. C'eſt un Problême de la nature de celui des *centres d'oſcillation.* Voyez le *Traité de Dynamique*, II. Partie, Chapitre III. Probl. I.

368. La ſeconde remarque que j'ai à faire, eſt ſur la maniére dont on réſout ordinairement le Problême de la poſition la plus avantageuſe des aîles du moulin à vent à l'égard du vent. M. *Daniel Bernoulli* a déja remarqué dans ſon Hydrodynamique, que dans la ſolution de ce Problême on devroit avoir égard à la viteſſe reſpective du vent par rapport au moulin, au lieu qu'on regarde d'ordinaire la viteſſe du vent comme infinie ; & il a fait voir qu'en ayant égard à la viteſſe du moulin & la regardant comme donnée, le Problême eſt beaucoup plus compliqué, que dans l'hypotheſe où on le réſout ordinairement. J'ajouterai à ce qu'il a dit, que dans la ſolution de ce Problême, on ne peut pas regarder la viteſſe du moulin comme donnée à volonté, ainſi que la viteſſe du vent. Il y a une certaine viteſſe à laquelle l'aîle doit arriver pour ſe mouvoir uniformément, & qui eſt telle, que quand elle a cette viteſſe, la force du vent pour la mouvoir eſt zero. D'où il s'enſuit que la figure & la poſition de l'aîle étant donnée, ſa viteſſe proprement dite, celle à laquelle elle doit arriver pour ſe mouvoir uniformément, eſt néceſſairement donnée : le Problême conſiſte donc à ſavoir quelle eſt la figure & la poſition de l'aîle, pour que cette viteſſe ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible.

Pour ne point m'engager en de trop longs calculs, je résoudrai ce Problême pour le cas où l'aîle est un parallélogramme rectangle d'une largeur infiniment petite.

369. Soit AB (Fig. 137) l'Axe du moulin, EDA l'angle que fait l'aîle avec l'Axe, BA la direction du vent, γ la vitesse d'un point de l'aîle éloigné du point D de la distance donnée a: soit $OD = b$ la vitesse du vent, la tangente de l'angle ODE (pour le Sinus total a) $= t$, on aura $OE = \frac{bt}{a}$. Soit OF la vitesse d'un point quelconque de l'aîle pour tourner autour de AB, on aura $OF = \frac{\gamma x}{a}$, x étant la distance de ce point à D. FD sera la vitesse respective du vent, & sa force sur ce point de l'aîle ou sur la petite surface qui y répond, sera $FD^2 \times \frac{FK^2}{FD^2} = FK^2 = (\frac{bt}{a} - \frac{\gamma x}{a})^2 \times \frac{aa}{aa+tt}$, & le moment de l'impulsion sera $xdx \times (\frac{bt - \gamma x}{a})^2 \times \frac{aa}{aa+tt}$: la vitesse γ doit être telle, que l'intégrale de cette quantité soit zero. Or en prenant les précautions que nous avons marquées ci-dessus (*art.* 367.) dans le calcul de cette intégrale, l'on aura $(\frac{x^2b^2t^2}{2} - \frac{2bt\gamma x^3}{3} + \frac{\gamma\gamma x^4}{4}) \times \frac{1}{aa+tt}$ pour son expression, qui lorsque $x = n$ que je suppose la longueur de l'aîle, devient $[\frac{n^2b^2t^2}{2} - \frac{2b\gamma tn^3}{3} + \frac{\gamma\gamma n^4}{4}] \times \frac{1}{aa+tt}$, & lorsque

$x = \frac{bt}{\gamma}$, elle devient $\frac{1}{aa+tt} \times \frac{b^4 t^4}{2 \cdot \gamma\gamma}$. D'où l'on tire $\frac{1}{6} \times \frac{b^4 t^4}{\gamma^2} - \frac{n^2 b^2 t^2}{2} + \frac{2 b \gamma t n^3}{3} - \frac{\gamma\gamma n^4}{4} = 0$. C'eſt l'Equation d'où il faut tirer la valeur de γ.

Il y a dans cette Equation trois inconnues γ, n, t, dont deux quelconques étant données, on a la troiſiéme, & cette Equation peut être regardée comme appartenant à une ſurface courbe, dans laquelle il faut déterminer la valeur de n & de t, afin que γ ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. Pour cela il faut remarquer, que la tangente en ce point de la ſurface courbe eſt paralléle à la baſe, qu'ainſi la ligne γ eſt à la fois une plus grande Ordonnée dans la courbe qui a γ & n pour Coordonnées, & dans celle qui a pour Coordonnées γ & t; c'eſt pourquoi il faut différentier d'abord l'Equation précedente, en regardant γ & n ſeulement comme variable, puis la différentier de nouveau en regardant ſeulement γ & t comme variable, & faire dans l'une & dans l'autre la différence de $d\gamma = 0$. On aura deux Equations, qui avec l'Equation propoſée ſerviront à faire connoître les trois grandeurs n, t, γ.

On voit aſſez par cet exemple, qui eſt, ſi je ne me trompe, le plus ſimple qu'on puiſſe choiſir, que ce Problême, réſolu comme il le doit être, eſt plus compliqué qu'on ne paroît l'avoir cru juſqu'ici.

370. Enfin, ma troiſiéme & derniére remarque eſt ſur le ſolide de la moindre réſiſtance. Toutes les ſolutions

qu'on a données de ce Problême, depuis M. *Newton* inclusivement, me paroissent ne pas répondre à la question, si on en excepte celles où on suppose que la masse du solide est donnée. Car il ne suffit pas de chercher & de trouver celui d'entre tous les solides qui ont le même Axe & la même base avec le même sommet, sur lequel l'impulsion de l'eau est la moindre qu'il est possible, il faut de plus diviser cette impulsion par la masse entiére pour avoir l'effet qu'elle produit, & qui est proprement le *minimum* qu'on cherche.

Il est donc question de chercher le solide *EABDO* (Fig. 138), tel que la somme des impulsions du Fluide divisé par la masse du solide soit un *minimum*, c'est-à-dire tel, qu'en imaginant le solide *EAeDO* qui en différe infiniment peu, ces deux solides sont entr'eux comme la somme des impulsions sur chacun, ou, ce qui est la même chose, la différence des deux comme la différence des impulsions. Le Problême se réduit donc au suivant.

Les points A, D *& la ligne* Ba *étant donnée de position, trouver la position des côtés* AB, BD, *telle, qu'en les faisant varier infiniment peu de* AB *en* A*e*, *& de* BD *en* *e*D, *la différence des impulsions soit comme le solide formé par* AB*e*CA *autour de* OK. En nommant $Aa = y$, eB, α, $2n$ le rapport de la circonférence au rayon, & en supposant les lignes Aa, Bb égales entr'elles, ce qui est permis ici, on aura $2n\alpha y dy$ pour le petit solide, & $4n.\alpha.d(\frac{y dy^3 dx}{ds^4})$ pour la différence des impulsions. Donc

$$2n\alpha . d(\frac{ydy^3dx}{ds^4}) = Bn\alpha ydy,$$

& $\frac{4ydy^3dx}{ds^4} = A + Byy$; donc ſupppoſant $adx = zdy$, on aura

$$4yza^3 = (Byy + A).(zz + aa)^2,$$

d'où l'on tirera la valeur de y & celle de x. La conſtante B doit être égale au rapport de l'impulſion totale à la maſſe totale, & cette conſtante combinée avec la conſtante A doit de plus être telle, que la courbe OE paſſe par les deux points donnés.

Au reſte, il eſt à remarquer qu'en certains cas il eſt permis de ſuppoſer $A = 0$, lorſqu'en faiſant $y = 0$ tout s'évanouit dans l'Equation $\frac{4ydy^3dx}{ds^4} = Byy$. On a pour lors $y = \frac{4a^3z}{B.(zz+aa)^2} = \frac{4a^3\sqrt{[uu-aa]}}{Bu^4}$ (en ſuppoſant $zz + aa = uu$) : & $dx = -\frac{16aadu}{Bu^3} + \frac{16a^4du}{Bu^5} + \frac{4aadu}{Bu^3}$. d'où l'on voit que *la courbe eſt Geométrique, lorſque* A = o.



CHAP. IV.

CHAPITRE IV.

Recherches ſur les Fluides qui ſe meuvent en tourbillon, & ſur le mouvement des Corps plongés dans ces Fluides.

JE diviſerai ce Chapitre en deux Parties ou Sections. Je traiterai dans la premiére des Loix du mouvement d'un Tourbillon fluide, & dans la ſeconde du mouvement des Corps qui y ſont plongés.

SECTION PREMIERE.

Des Fluides qui ſe meuvent en Tourbillon.

371. Chaque particule d'un Fluide qui ſe meut en Tourbillon, tend à chaque inſtant à s'échapper par la tangente de la courbe qu'elle décrit, & la viteſſe avec laquelle elle tend à s'échapper par cette tangente, doit être regardée comme compoſée de la viteſſe qu'elle aura l'inſtant ſuivant, dans la direction du petit côté de la courbe contigu à la tangente, & d'une autre viteſſe infiniment petite qui eſt détruite, & qui n'eſt autre choſe que ſa force centrifuge.

Donc, pour qu'un Tourbillon ſubſiſte dans un état permanent, il faut que toutes ſes parties ſuppoſées en repos, & animées par des forces égales à leurs forces centrifuges, puiſſent reſter en équilibre.

Il faut, de plus, que le mouvement circulaire de chaque couche soit tel, qu'il ne puisse être ni accéléré ni retardé par celui des autres couches.

Donc, quoique les Loix des forces centrifuges dans un Tourbillon dépendent en partie de celles du mouvement circulaire, néanmoins il faut considérer le mouvement circulaire des parties d'un Tourbillon, non-seulement par rapport aux changemens qu'il peut recevoir comme mouvement, mais aussi par rapport à la force centrifuge qui en résulte.

372. Plusieurs Auteurs ont donné d'après M. *Newton* les Loix du mouvement des différentes couches dans un Tourbillon circulaire, mais ils n'ont point pensé à déterminer la Loi de la force centrifuge. Ils ont sans doute supposé tacitement, que quelque Loi qu'observassent les différentes couches du Tourbillon dans leurs mouvemens, elles seroient toujours en équilibre en vertu de leurs forces centrifuges, puisque cette force seroit la même dans tous les points également éloignés du centre.

Néanmoins parmi ceux qui ont attaqué la proposition de M. *Newton*, quelques-uns lui objectent * qu'en conséquence de la Loi qu'il assigne, la force centrifuge des couches devroit aller en diminuant du centre vers la circonférence ; ce qui, selon ces Auteurs, est impossible, puisque les parties voisines du centre devroient alors s'en éloigner, & que l'équilibre seroit rompu. Cette observation semble même avoir d'autant plus de force ; que M.

* Voyez l'Hydrodyn. de M. *Daniel Bernoulli*, Sect. XI. *art.* 6.

Newton dans le Scolie de la Prop. 52. l. II, rejette la ſuppoſition que les couches plus voiſines du centre ſoient les plus denſes, par la raiſon, dit-il, que les parties plus denſes doivent s'éloigner le plus du centre.

Il eſt viſible que la queſtion qu'il s'agit de décider ici eſt entiérement analogue à celle que nous avons examiné fort au long dans l'*article* 40. de cet Ouvrage; nous obſerverons ſeulement, qu'au lieu qu'on peut ſuppoſer à la rigueur la peſanteur reglée par une loi Mathematique, on ne peut faire une pareille ſuppoſition ſur la force centrifuge; car cette force naît du mouvement circulaire des différentes couches, qu'on ne ſauroit regarder comme parfaitement Mathematiques.

D'où nous conclurons que *la force centrifuge ne peut aller en diminuant du centre vers la circonférence, à moins qu'on ne ſuppoſe dans les parties du Tourbillon aſſez de tenacité pour réſiſter au mouvement qui proviendroit de l'inégalité de preſſion.*

COROLLAIRE.

373. De-là il s'enſuit que la force centrifuge ne peut augmenter tellement de la circonférence vers le centre, qu'elle ſoit infinie au centre. Car comme la tenacité des parties du Fluide n'a qu'une réſiſtance finie, puiſqu'il ne ne faut qu'une force finie pour les diviſer, il eſt conſtant que la force centrifuge ne ſeroit alors que trop grande pour vaincre cette tenacité; ce qui romproit l'équilibre.

Du Tourbillon cylindrique.

PROPOS. I.

374. *Un Tourbillon cylindrique ne peut ſubſiſter dans un Fluide, ſans avoir un Axe infini en longueur.*

Suppoſons que l'Axe du Tourbillon ſoit fini, & imaginons le renfermé dans un vaſe cylindrique dont la ſection par l'Axe ſoit le rectangle *AF* (Fig. 139). Si on fait à ce vaſe une petite ouverture en un point quelconque *G*, il eſt conſtant que la particule de Fluide qui répond à cette ouverture, tendra à s'échapper par-là, puiſqu'elle eſt preſſée ſuivant *GV* par une force égale à la ſomme des forces centrifuges de la colomne *CG*, & que la preſſion réagit contre les parois du vaſe. Or comme le Fluide environnant qui eſt hors du vaſe, eſt ſans mouvement (*hyp.*) & ſans force centrifuge, il eſt clair que la particule du Fluide *G* doit s'échapper, puiſque rien ne réſiſte à ſon effort. Qu'on détruiſe préſentement le vaſe; toutes les particules comme *G*, n'en feront pas moins d'effort pour s'échapper latéralement & avec des viteſſes différentes, ſans que rien les en empêche. Donc le Tourbillon ſe diſſipera. *Ce Q. F. D.*

COROLLAIRE.

375. *Un Tourbillon cylindrique ne peut ſubſiſter dans un milieu quelconque ſans être infini en tout ſens.* Car 1°. il doit être infini en longueur. 2°. Sa ſurface extérieure ne pouvant être parfaitement Mathematique, il faut néceſſairement

ou que le Tourbillon se ralentisse & se détruise peu à peu, ou que sa surface communique son mouvement à celle qui la touche, celle-ci à la suivante &c. Donc &c.

Des Loix du mouvement dans le Tourbillon cylindrique.

376. M. *Newton* dans la Prop. 51. l. II. de ses Principes, a cherché quelle devoit être la Loi des vitesses des différentes couches d'un Tourbillon formé par la rotation d'un Cylindre, tournant autour de son Axe au milieu d'un Fluide. Pour cela, il considére le Tourbillon comme parvenu à un état permanent, & il cherche quelle doit être la Loi des vitesses des différentes couches, pour qu'une couche quelconque soit autant retardée par la couche supérieure, qu'accélerée par l'inférieure : d'où il conclut que le tems periodique de chaque couche doit être comme le rayon, c'est-à-dire que la vitesse doit être égale dans toutes les couches.

377. On peut, ce me semble, objecter deux choses contre cette Théorie : 1°. la force centrifuge devroit aller en diminuant du centre vers la circonférence ; ce qu'il est difficile de supposer (*art.* 372.) surtout, si les particules du Fluide ont peu de tenacité.

2°. De plus, le Cylindre solide qui est au centre, & dont les parties se meuvent d'un même mouvement angulaire, est continuellement retardé par le frottement de la couche qui lui est immédiatement contiguë ; il doit par conséquent retarder aussi le mouvement de cette couche, & celle-ci le mouvement des suivantes, & ainsi à

l'infini ; auſſi M. *Newton* ſuppoſe-t'il qu'il y ait une force qui rende continuellement au Cylindre la quantité de mouvement qu'il perdroit à chaque inſtant.

3°. D'ailleurs, M. *Newton* n'a déterminé le mouvement des couches du Tourbillon, qu'en ſuppoſant que la force du frottement étoit égale dans toutes les couches. Or il eſt aiſé de faire voir qu'il y a trois cas où cette force eſt nulle. Car ſoit v la viteſſe d'une couche quelconque, x ſon rayon, on aura $\frac{v}{x}$ pour le mouvement angulaire d'une couche, & $\frac{xdv - vdx}{xx}$ pour ſa viteſſe angulaire par rapport à la couche infiniment proche. D'où l'on voit que la viteſſe reſpective des deux couches ſera $\frac{xdv - vdx}{x}$, & cette viteſſe multipliée par la circonférence ou par le rayon qui lui eſt proportionnel, donnera dans les Principes de M. *Newton* $xdv - vdx$ pour la quantité du frottement qu'il faut faire égale à une conſtante cdx. Or cela poſé, je dis qu'on aura pour intégrale $v = c \pm bx$. Ce qui donne trois cas & même quatre ; ſavoir 1°. & 2°. celui où c, b ſont toutes deux des quantités réelles, b étant poſitive ou négative. 3°. Celui de $b = 0$ qui donne $c =$ à une conſtante, & qui eſt le cas de M. *Newton*. 4°. Celui de $c = 0$, qui donne $u = bx$. En général, la force du frottement ſera nulle, quand les viteſſes des couches ſuivront une progreſſion Arithmétique quelconque, dx étant conſtant.

Des quatre cas précedens, on peut exclure celui où c feroit positif & b négatif, parce qu'il y auroit dans cette hypothefe une partie du Tourbillon qui fe mouvroit dans un fens, & une autre dans un fens contraire, ce qu'on ne peut imaginer, fi le Tourbillon reçoit fon mouvement du Cylindre. Quoiqu'il en foit, il eft certain que les difficultés que nous avons faites contre le cas de $u = c$, s'appliquent auffi aux trois premiers cas.

378. Il n'y a que le quatriéme de ces cas où les forces centrifuges vont en augmentant depuis le centre, & où on n'a pas befoin d'une force qui entretienne continuellement le Tourbillon. C'eft pourquoi je ne doute point que ce ne foit la véritable Loi du mouvement des couches, & qu'elles ne doivent faire toutes leurs révolutions en même tems.

Je ne vois contre cette hypothefe qu'une difficulté à laquelle je crois devoir répondre, parce qu'elle fe préfentera fans doute comme affez forte à l'efprit de quelques Lecteurs. C'eft qu'il n'eft pas aifé d'imaginer que les parties les plus éloignées du Cylindre ayent plus de mouvement que celles qui en font plus proches, d'autant plus qu'elles ne reçoivent leur mouvement que de celles-là. Je réponds à cette objection, qu'il n'y a dans une pareille diftribution de mouvement aucune abfurdité, & qu'elle n'eft pas plus difficile à concevoir que celle qui fe fait entre deux Corps attachés à un levier du même côté du point fixe, lorfqu'on donne une impulfion à celui qui eft le plus voifin du point fixe. Car le plus éloigné

reçoit alors plus de vitesse que l'autre n'en conserve; mais la vitesse que reçoit le Corps le plus éloigné, n'est jamais aussi grande que la vitesse primitive imprimée au plus proche; il en est de même dans la distribution du mouvement entre deux différentes couches.

Remarques sur la formule donnée par M. Bernoulli, *pour les vitesses des couches d'un Tourbillon cylindrique.*

379. M. *Bernoulli* dans sa Dissertation qui a remporté le prix de l'Académie en 1730. & qui a pour titre: *Nouvelles pensées sur le systême de* Descartes, *avec la manière d'en déduire les Orbites & les Aphelies des Planetes*, a fait plusieurs objections contre la Théorie de M. *Newton* que nous venons d'exposer. Ses difficultés se réduisent à deux principales; savoir, à ce que M. *Newton* n'a point fait entrer la pression des couches dans l'évaluation de la quantité du frottement, & qu'il n'a point eu égard au bras de Levier par lequel chaque couche agit.

Je n'examinerai point ici si les objections de M. *Bernoulli* sont fondées; je me contente de renvoyer le Lecteur au Scolie de la Prop. 52. l. II. de M. *Newton*, où l'on verra que ce grand Geométre les avoit prévûes au moins en partie: je ferai seulement ici une remarque qui pourra être de quelque utilité.

380. M. *Bernoulli* ayant nommé x le rayon d'une couche quelconque, & v sa vitesse, ce qui donne $\frac{xdv - vdx}{x}$ pour la vitesse respective de deux couches infiniment proches,

ches, & $x \int \frac{vvdx}{x}$ pour la quantité de la pression résultante de la force centrifuge, multiplie le produit de ces deux quantités par le bras de Levier x, ce qui donne $x \times \frac{xdv - vdx}{x} \times \int \frac{vvdx}{x}$, pour la force qui tend à accélérer le mouvement d'une part, & la retarder de l'autre. Faisant donc cette quantité égale à une constante cdx, il a l'Equation suivante

$$(xxdv - vxdx) \times \int \frac{vvdx}{x} = cdx.$$

Pour intégrer cette Equation, il suppose $v = x^n$, par conséquent, selon lui, $\int \frac{vvdx}{x} = \frac{x^{2n}}{2n}$; d'où il tire après les substitutions $n = -\frac{1}{3}$.

Mais outre qu'on peut opposer à M. *Bernoulli* deux difficultés semblables à celles que nous avons faites (*art.* 377.) contre la regle de M. *Newton*, il y en a une autre bien plus considérable contre la valeur qu'il assigne à n. Cette valeur est un nombre négatif; or l'intégrale de $x^{2n-1}dx$ n'est point $\frac{x^{2n}}{2n}$, lorsque n est un nombre négatif, mais $\frac{x^{2n} + o^{2n}}{2n}$, o^{2n} étant une constante infinie. Donc M. *Bernoulli* auroit dû supposer $\int \frac{vvdx}{x} = \frac{x^{2n} + o^{2n}}{2n}$; mais dans cette supposition son Equation n'auroit plus été homogene, & il n'auroit pû conclure $n = -\frac{1}{3}$ comme

il a fait : il paroît donc qu'on ne sauroit admettre la regle de M. *Bernoulli*.

381. Pour trouver l'intégrale de $(xxdv - vxdx) \times \int \frac{vvdx}{x} = cdx$, & par conséquent la vitesse des couches dans l'hypothese de M. *Bernoulli*, je remarque, que la valeur de v en x quelle qu'elle soit, doit au moins être telle, que lorsque x est infiniment petite, on ait $v = x^n$, n représentant un nombre inconnu. On aura donc, lorsque x est infiniment petite, l'Equation $(n - 1) \cdot x^{n+1} dx \times (\frac{x^{2n} + o^{2n}}{2n}) = cdx$, Equation dont les deux membres ne peuvent être égaux, à moins qu'on n'ait $n - 1 = 0$, & $n = 1$. Donc lorsque x est infiniment petite, on a $v = x$. Je dis présentement qu'on aura $v = x$ dans toute l'étendue du Tourbillon. Car de ce que $n - 1 = 0$ dans l'Equation précedente, il s'ensuit que la constante $c = 0$. Donc en général $xxdv - vxdx = 0$, c'est-à-dire $v = x$.

Donc *dans l'hypothese de M.* Bernoulli, *toutes les couches doivent faire leur révolution en même-tems.*

382. Nous avons supposé avec M. *Bernoulli*, que le frottement de chaque couche étoit proportionnel à la vitesse respective, & à la quantité de la pression. Néanmoins M. *Musschenbroek* dans des Expériences fort exactes qu'il a faites sur cette matiére, a trouvé que quand la vitesse respective étoit très-petite, le frottement étoit proportionnel à la vitesse, mais qu'il n'étoit pas proportionnel au poids. C'est pourquoi on pourroit prendre pour

l'Equation différentielle entre v & x, $(xxdv - xvdx) \times \varphi (\int \frac{vvdx}{x}) = cdx$, $\varphi (\int \frac{vvdx}{x})$ exprimant une fonction quelconque de $\int \frac{vvdx}{x}$.

Lorſque x eſt infiniment petite, cette Equation ſe réduit à

$$(xxdv - vxdx) \times (\int \frac{vvdx}{x})^m = cdx,$$

m étant un nombre poſitif quelconque : car il répugne que ce ſoit un nombre négatif. Cela poſé, on prouvera comme on l'a fait (*art.* 381.) que $v = x$ dans toute l'étendue du Tourbillon.

383. Enfin, ſi on ſuppoſe que le frottement ſoit proportionnel à une fonction quelconque de la viteſſe reſpective, alors outre l'intégrale $v = x$, il pourroit encore ſouvent y en avoir une autre. Car ſoit, par exemple, $xx \times (\frac{xdv - vdx}{x})^m = cdx^m$, on trouve que l'intégrale de cette Equation peut être également $v = x$, & $v = x^{1 - \frac{2}{m}}$: or $1 - \frac{2}{m}$ eſt une quantité poſitive, ſi $m > 2$.

384. Cependant on peut aſſurer qu'en général, quelle que ſoit la Loi du frottement, le Tourbillon ne pourra ſubſiſter dans un état fixe, que quand toutes ſes couches feront leurs révolutions en même tems. Car comme on ne peut pas pouſſer la diviſion des particules juſqu'à n'être que des ſurfaces Mathematiques, on doit néceſſairement ſuppoſer qu'il y a au centre du Tourbillon un petit eſpace

circulaire dont tous les points font leur révolution en même tems, & qui peut être regardé comme un Cylindre ſolide. Or dans cette ſuppoſition, il eſt clair par l'*article* 377. que toutes les couches du Tourbillon feront leur révolution dans le même tems.

Donc en général *pour que le Tourbillon ſubſiſte, il eſt néceſſaire que les tems périodiques des révolutions de toutes les couches ſoient égaux.*

Du mouvement qu'un Cylindre qui tourne autour de ſon Axe, communique à un Fluide qu'on ſuppoſe l'environner.

385. Nous venons de démontrer que le Cylindre & le Fluide dans lequel il tourne doivent faire leurs révolutions en même tems, lorſque le Tourbillon eſt arrivé à un état permanent. Il s'agit de déterminer préſentement quelle eſt la viteſſe avec laquelle le Cylindre fait tourner le Fluide, ou, ce qui revient au même, de trouver la viteſſe du Fluide, la viteſſe initiale du Cylindre étant donnée.

386. Soit *ACO* (Fig. 140) le Cylindre, *SGBAQO* la maſſe fluide qu'il doit faire tourner, renfermée dans un vaſe *SBG* dont je ſuppoſe que les parois ne s'oppoſent nullement à la rotation du Fluide. Imaginons d'abord que cette maſſe fluide *SGBAQO* ſoit glacée, & qu'elle reçoive ſon mouvement du Cylindre *ACO*; il eſt évident qu'à cauſe du frottement mutuel des ſurfaces contiguës du Cylindre & du Fluide, le Fluide ne ceſſera de rece-

voir du mouvement, que quand le mouvement angulaire du Cylindre ſera le même que le mouvement angulaire du Fluide.

Pour ſavoir quelle eſt alors la viteſſe reſtante au Cylindre *ACO*, car c'eſt à quoi ſe réduit la queſtion, je marque que la force réſultante du frottement des ſurfaces *AQO* l'une contre l'autre, tend à la fois à accélérer le mouvement du Fluide glacé *SGBAQO*, & à retarder celui du Cylindre; que cette force ſe diſtribue également dans tous les points d'une même couche circulaire, & que dans deux points *A*, *K* de deux couches différentes, elle ſe diſtribue de maniére, que la force en *K* eſt à la force en *A*, comme *CK* à *CA*, * & que la ſomme des momens de toutes ces forces eſt égale au moment de la force du frottement appliquée en *A*. Donc ſi la force du frottement en *A* dans un inſtant quelconque, eſt appellée φ, la circonférenee *AQO*, *c*, on trouvera $\varphi . c \times CA^3 : (\frac{CB^4 - CA^4}{4})$ pour la force qui accélére à chaque inſtant la ſurface concave. On trouvera par une Méthode ſemblable, que $\varphi . c . CA^3 : (\frac{CA^4}{4})$ eſt la force qui anime la ſurface convexe, & qui tend à la retarder. Donc ſoit que la force φ varie ou non, il eſt conſtant que l'accroiſſement inſtantané de la viteſſe de la ſurface concave, ſera toujours à ce que la ſurface du Cylindre perd de viteſſe au même inſtant, comme CA^4 eſt à $CB^4 - CA^4$.

* Voyez l'*art.* 75. du *Traité de Dynamique.*

Soit donc a la viteſſe initiale du Cylindre, u la viteſſe de la maſſe fluide glacée $SBGAQO$ dans un inſtant quelconque, la viteſſe perdue par le Cylindre, ſera $\frac{u.(CB^4 - CA^4)}{CA^4}$, & par conſéquent $a - \frac{u.(CB^4)}{CA^4}$ la viteſſe reſpective. Or le Tourbillon n'eſt dans un état permanent, que quand la viteſſe reſpective $= 0$. Donc quand le Tourbillon eſt entiérement formé, on a $u = \frac{a.CA^4}{CB^4}$ pour la viteſſe qui reſte au Cylindre. *Ce Q. F. Trouver.*

387. Si on ſuppoſoit que δ fut la denſité du Fluide, & Δ celle du Corps, on auroit pour la force qui anime la maſſe fluide glacée, $\varphi.c.\delta \times CA^3 : \delta(\frac{CB^4 - CA^4}{4})$, & pour celle qui anime le Cylindre, $\varphi.c.\delta \times CA^3 : \Delta(\frac{CA^4}{4})$; d'où l'on conclura que $a - \frac{u.\delta(CB^4 - CA^4)}{\Delta.CA^4} - u$ eſt la viteſſe reſpective du Cylindre & du Fluide glacé dans un inſtant quelconque, & par conſéquent $u = \frac{a.\Delta.CA^4}{(\Delta - \delta).CA^4 + \delta.CB^4}$ eſt la viteſſe du Cylindre après que le Tourbillon eſt formé.

Donc en général, ſi le Fluide $SGBAQO$ eſt ſuppoſé glacé, la viteſſe de la ſurface BS ſera $\frac{a.\Delta.CA^3.CB}{(\Delta - \delta).CA^4 + \delta.CB^4}$.

388. Préſentement, ſi la maſſe fluide $SGBAQO$ eſt regardée comme véritablement fluide, & qu'on veuille

déterminer de quelle maniére le mouvement du Cylindre ſe communique aux différentes couches, il faudroit ſavoir comment la force qui réſulte du frottement des ſurfaces *AQO* ſe diſtribue aux différens points du Fluide. Mais c'eſt ce qu'on ne peut déterminer par la Théorie ſeule ſans faire pluſieurs hypotheſes, fort éloignées peut-être de la vérité.

Si on ſe rend attentif à ce que l'Expérience peut nous apprendre ſur un ſujet ſi compliqué, on remarquera que le mouvement du Cylindre ſe communique d'abord aux couches les plus proches de lui, que celles-ci entraînent les couches voiſines, & ainſi de ſuite. Je crois donc que ce ne ſera pas s'écarter beaucoup de la vérité, que de regarder le Fluide comme composé d'une infinité de couches concentriques infiniment minces, & d'une épaiſſeur d'autant plus grande, que le Fluide ſera composé de parties plus adhérentes entr'elles, de ſuppoſer enſuite que le Cylindre communique d'abord ſon mouvement à la premiére de ces couches, & l'oblige de ſe mouvoir avec lui d'un même mouvement angulaire, qu'enſuite cette couche conſidérée comme ne faiſant avec le Cylindre qu'un même Corps ſolide, communique ſon mouvement à la Zone ſuivante, & ainſi de ſuite.

De-là il s'enſuit, que ſi on appelle r le rayon du Cylindre, r celui de la premiére couche, R celui de la ſeconde &c. on trouvera que la viteſſe de la couche *GBO*, eſt $a \times \frac{r^4}{\mathrm{r}^4} \times \frac{\mathrm{r}}{r} \times \frac{\mathrm{r}^4}{R^4} \times \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}}$ &c. $= \frac{a \cdot CA^4}{CB^4} \times \frac{\mathrm{C}B}{CA}$, préciſément la

même, que quand le Fluide *SGBAQO* eſt ſuppoſé glacé, & de même denſité que le Cylindre.

Si le Fluide & le Cylindre étoient de différentes denſités, on trouveroit auſſi pour la viteſſe de la couche *GBO* la même formule que dans l'*article* 387.

Du Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires.

389. L'exiſtence d'un Tourbillon dont les couches ſont circulaires, eſt évidemment poſſible : il n'en eſt pas de même d'un Tourbillon dont les couches ne ſeroient pas circulaires : ſi on ne voit pas avec clarté qu'un tel Tourbillon ne puiſſe exiſter, on n'en voit pas non plus fort clairement la poſſibilité : j'eſpere même démontrer qu'il ne peut y avoir de Tourbillon dont les couches ne ſoient point circulaires ; cette matiére m'a paru aſſez importante & aſſez curieuſe pour mériter d'être approfondie ; c'eſt l'objet de la Théorie que je vais donner.

390. Suppoſons d'abord le Tourbillon exiſtant & arrivé à un état permanent, & ſoit *ABCD* (Figure 141) une des couches non circulaires de ce Tourbillon ; pour trouver la couche *abcd* qui eſt infiniment proche de celle-là, je remarque que la viteſſe du Fluide aux points *R*, *S*, doit être en raiſon inverſe des perpendiculaires *Rr*, *Ss*, & que de plus il faut (*art.* 371.) que les parties du Fluide ſoient en équilibre en vertu de leurs forces centrifuges.

Or comme la viteſſe de chaque particule n'eſt pas conſtante dans la courbe qu'elle décrit, il s'enſuit que la

la force centrifuge n'eſt pas perpendiculaire à cette couche; c'eſt pourquoi on la ſuppoſera décompoſée en deux autres forces, dont l'une ſoit perpendiculaire à la couche, & dont l'autre agiſſe dans le ſens de la couche même. Je prouverai dans la ſuite que le Tourbillon ne peut ſubſiſter, à moins que les particules du Fluide ne ſoient en équilibre en vertu de chacune de ces forces en particulier. Je vais donc d'abord conſidérer ici l'équilibre qui réſulte de la force centrifuge eſtimée perpendiculairement à chaque couche, & j'examinerai plus bas l'équilibre qui réſulte de l'autre partie de cette force.

Imaginons donc entre deux couches infiniment proches *ARS*, *ars*, deux petites colomnes *Rr*, *Ss*, perpendiculaires à ces couches, & n'ayons d'abord égard qu'à la partie de la force centrifuge qui agit perpendiculairement aux couches, que nous nommerons déſormais *force centrifuge* ſimplement, il eſt clair que les particules qui ſont dans la petite colomne *Rr*, étant ſuppoſées animées par la force centrifuge qui eſt en *R*, doivent être en équilibre avec les particules de la colomne *Ss* animées de la force centrifuge en *S*. Donc *Rr* doit être à *Ss* (*article* 20. *&* 56.) comme la force centrifuge en *S* à la force centrifuge en *R*, c'eſt-à-dire comme le quarré de la viteſſe en *S*, diviſé par le rayon de la développée en *S*, eſt au quarré de la viteſſe en *R* diviſé par le rayon de la développée en *R*. Mais *Rr* eſt à *Ss*, comme la viteſſe en *S* à la viteſſe en *R*. Donc *la viteſſe en* R *eſt à la viteſſe en* S, *comme le rayon de la développée en* R *eſt au rayon en* S;

c'eſt-à-dire que Rr *doit être à* Ss, *comme le rayon de la développée en* S *au rayon de la développée en* R.

Suppoſant donc le Tourbillon poſſible, on voit que l'une des couches *ADBC* étant donnée, on peut trouver toutes les autres.

Donc ſi le Tourbillon eſt formé par un Fluide renfermé dans un vaſe *ADBC* de figure donnée; comme l'on connoît la premiére couche *ADBC*, on connoîtra par ce moyen la ſeconde, enſuite la troiſiéme &c.

Il ne nous reſte plus qu'à examiner ſi un pareil Tourbillon peut exiſter; c'eſt ce que nous verrons dans les Remarques ſuivantes.

Remarque I.

391. Si on ſuppoſe le Tourbillon renfermé dans un vaſe immobile *ARS*, (Fig. 141) & que les différentes couches du Tourbillon ne faſſent pas leur révolution en même tems, il doit réſulter néceſſairement de leur adhérence mutuelle un frottement qui détruira peu à peu le mouvement, & anéantira enfin le Tourbillon. Donc *pour que le Tourbillon ſubſiſte, il eſt néceſſaire que toutes les couches faſſent leurs révolutions en même tems.* Or je vais faire voir d'abord qu'il n'y a que le Tourbillon circulaire où cette Loi puiſſe s'obſerver.

En effet, nous avons vu ci-deſſus, que la viteſſe en *A* devoit être à la viteſſe en *R*, comme le rayon oſculateur en *A* eſt au rayon oſculateur en *R*: par conſéquent, ſi on appelle *B* le rayon oſculateur en *A*, & *R* le rayon oſcu-

lateur en R, & qu'on ſuppoſe la viteſſe en A repréſentée par B, la viteſſe en R ſera repréſentée par R ; par la même raiſon, la viteſſe en a doit être à la viteſſe en r, comme le rayon oſculateur en a eſt au rayon oſculateur en r. Mais ſi les couches ARS, ars, font leur révolution dans le même tems, la viteſſe en a doit être $= B - Aa$, & la viteſſe en $R = R - Rr$. Il faut donc que $B - Aa$ ſoit à $R - Rr$, comme le rayon oſculateur de la courbe ars en a au rayon oſculateur en r; c'eſt-à-dire qu'en général la courbe ars doit être telle par rapport à la courbe ARS, que le rayon oſculateur de la courbe ars en un point quelconque r, ſoit en raiſon conſtante avec le rayon oſculateur de la courbe ARS en R, diminué de la quantité Rr, ou, ce qui eſt la même choſe, il faut que le rayon oſculateur de la courbe ars en un point quelconque r, ſoit en raiſon conſtante avec le rayon oſculateur de la courbe, qui paſſant par r auroit la même développée que ARS.

Pour déterminer la courbe ARS (Fig. 143) par ces conditions, ſoient RS, SN, deux côtés égaux & conſécutifs de cette courbe $ARSN$, dont RQ, SG, NL ſoient les rayons oſculateurs en R, S, N; $arsn$ la courbe qui forme la couche infiniment proche, & qui eſt telle, (*art.* 390.) que $Rr . RQ = Ss . SG = Nn . NL$; ms, st deux petits Arcs parallèles à NS & SR, & qui appartiennent à la courbe dont la développée eſt la même que celle de ARS; ayant fait $SG = R$, $RQ = R - dR$, $NL = R + dR$, la conſtante $SR = ds$, la donnée $Aa = nds$ (n exprimant un nombre conſtant), on aura

$Ss = \frac{Bnds}{R}$; $Rr = \frac{Bnds}{R} + \frac{BndsdR}{RR}$; $Nn = \frac{Bnds}{R} - \frac{BndsdR}{RR}$; & par conséquent $tr = \frac{BndsdR}{RR}$; $nm = \frac{BndsdR}{RR}$: de plus, sr ou $ts = \frac{SR \times sQ}{SQ} = ds.(R - \frac{Bnds}{R} - dR):(R - dR) = ds(1 - \frac{Bnds}{RR})$. Donc l'angle rst ou $\frac{rt}{sr} = \frac{BndsdR}{RRds - Bnds^2}$; on trouvera de même l'angle $nsm = \frac{BndsdR}{RRds - Bnds^2}$. Or le rayon osculateur de la courbe nsr est à celui de la courbe mst, comme le Sinus de l'angle de contingence $\frac{ds}{r}$ de la courbe mst, est au Sinus de l'angle de contingence de la courbe nsr, qui est $\frac{ds}{r} - nsm + tsr$. Il faut donc que ces deux Sinus de contingence soient en raison constante, c'est-à-dire, il faut que $BndR:(Rds - \frac{Bnds^2}{R}) - BndR:(Rds - \frac{Bnds^2}{R})$ soit égale à une quantité constante $\frac{pds}{a}$; d'où il s'ensuit (à cause que $dR - dR = -ddR$, & que dR & dR ne different l'un de l'autre que d'un infiniment petit du second ordre) que

$$\frac{-ddR}{R} = \frac{pds^2}{aa},$$

en supposant $nB = a$. D'où l'on tire

$ds = dR : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{aa}]}$ .... (Z).

Voilà quelle doit être l'Equation entre les Arcs AR, de la courbe ARS, & les rayons de la développée qui leur répondent; mais il faut remarquer que la courbe ars doit avoir par rapport à la couche qui la suit immédiatement, la même propriété que la courbe ARS a par rapport à la courbe ars. D'où il s'ensuit qu'en nommant s les Arcs de la courbe ars, R les rayons osculateurs correspondans, il faut que

$$ds = d\mathrm{R} : \sqrt{[\mathrm{mm} - \frac{\mathrm{pRR}}{aa}]} \ldots\ldots\ldots\ldots (Y).$$

Pour voir si cette Equation est vraye, je remarque d'abord qu'on peut supposer $\mathrm{p} = p + \frac{2qds}{a}$, $\mathrm{m} = m + \frac{nds}{a}$ (q & n étant des nombres constans): de plus, $\mathrm{R} : R - \frac{Bnds}{R} :: 1 : 1 + \frac{pds}{a}$; & $ds : ds :: R - \frac{Bnds}{R} : R$; de-là on tirera la valeur de R & celle de dR, aussi-bien que celle de ds, & ces valeurs étant substituées avec celles de m & de p dans l'Equation (Y), on aura, après avoir ôté ce qui se détruit;

$$-\frac{Bnds}{RR} = \left(\frac{BndR}{RR} - \frac{pdR}{a}\right) : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{a}]}$$
$$+ \left(\frac{qRRdR - appnBdR - ppRRdR - aamndR}{a^3}\right) : [mm - \frac{pRR}{a}]^{\frac{3}{2}}.$$

Or il est impossible, comme on le peut voir aisément, que cette derniére Equation soit vraye en même tems que l'Equation (Z), à moins que le rayon R ne soit constant. Car on trouvera après en avoir fait le calcul, que pour

que ces deux Equations s'accordassent, il faudroit qu'on eût $2mm - \frac{RR}{aa}(3p + mn + pmm) + \frac{qR^4}{a^4} = 0$. Or 1°. lorsque p est positif, on ne sauroit supposer $m = 0$, puisqu'autrement l'Equation $ds = d\dot{R} : \sqrt{[mm - \frac{pRR}{aa}]}$ seroit imaginaire ; d'où il s'ensuit que cette Equation ne peut avoir lieu pour lors, à moins que R ne soit constant. 2°. Si p est négatif, & qu'on suppose $m = 0$, alors il faudroit encore avoir $q = 0$, & $p = 0$. Ce qui donne R constant.

Donc *un Tourbillon renfermé dans un vase, & dont toutes les couches font leur révolution en même tems, ne sauroit subsister, à moins que ses couches ne soient circulaires.*

On pourroit nous objecter que nous avons supposé dans la démonstration précedente, la nécessité de l'équilibre des colonnes Rr, Ss, en vertu de la seule force centrifuge estimée perpendiculairement à ces couches, sans avoir encore démontré la nécessité de cet équilibre. Mais on va voir par la Théorie que nous établirons dans la Remarque suivante, que cette supposition ne nuit point à la démonstration.

Remarque II.

392. Nous allons démontrer à présent en général, l'impossibilité d'un Tourbillon dont les couches ne sont point circulaires.

Nous imaginerons d'abord que deux des courbes *ARS*, *ars*, (Figure 141) qui représentent les couches infini-

ment proches du Tourbillon, ſoient deux Orbes ſolides, & que le Fluide ſe meuve dans l'eſpace qui eſt entre ces deux Orbes, comme dans un Canal fermé de toutes parts; il eſt conſtant, comme nous l'avons déja remarqué, que les parois de ce Canal ſeront preſſés, non-ſeulement par la force centrifuge des parties du Fluide, eſtimée perpendiculairement à chaque couche, mais encore par une autre partie de la force centrifuge qui agit dans la direction de chaque couche. C'eſt de cette derniére force que réſulte l'action mutuelle des tranches Rr, Ss, pour ſe pouſſer les unes les autres. Or ſi on ſuppoſe que Aa ſoit l'endroit du Canal où le Fluide ſe meuve avec le plus de viteſſe, & qu'on faſſe la viteſſe du Fluide en cet endroit, égale à u, on trouvera (*art.* 145. & 246.) que la preſſion en R eſt $\frac{uu(Rr^2 - Aa^2)}{2Rr^2}$, ou (faiſant $uu = 2pc$) $pc(1 - \frac{Aa^2}{Rr^2})$.

Donc ſi on fait au Canal $ARSsraA$ une petite ouverture en R, le Fluide s'échappera néceſſairement, ſoit que le Canal $ARSsraA$ ſoit dans le vuide, ou dans un Fluide ſtagnant pareil à celui qui circule dans ce Canal.

393. De-là il eſt aiſé de conclure en premier lieu, qu'*un Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires, ne ſauroit ſubſiſter dans un Fluide indéfini, quelque hypotheſe qu'on faſſe ſur la viteſſe de ſes différentes couches.* Ce qui ſuffit pour renverſer entiérement l'idée de ceux qui ont voulu ſubſtituer aux Tourbillons circulaires de *Deſcartes*

des Tourbillons elliptiques, s'imaginant qu'ils expliqueroient plus facilement les Phenomenes par ce moyen.

394. En ſecond lieu, ſi on ſuppoſe que le Fluide ſoit renfermé dans un vaſe, & que les colomnes Rr, Ss ſoient en équilibre, il faut de plus, que les Canaux AR, ar, y ſoient auſſi. En effet, ſoit ARS, le vaſe, & ars, HEe, hHm, &c. les courbes que le Fluide eſt ſuppoſé décrire: pour que le Tourbillon puiſſe ſubſiſter, il faut (en imaginant la courbe $RrEM$ perpendiculaire à toutes les couches du Tourbillon), que la preſſion en R & en N ſoit la même (*article* 20. & 56.): or par la formule ci-deſſus, il eſt évident que la preſſion en R ſera proportionnelle au quarré de la viteſſe en A moins le quarré de la viteſſe en R: de même la preſſion en E ſera égale au quarré de la viteſſe en E moins le quarré de la viteſſe en H, il faut donc que le quarré de la viteſſe en A moins le quarré de la viteſſe en H, ſoit égale au quarré de la viteſſe en R moins le quarré de la viteſſe en E.

De-là il s'enſuit que la courbe ARS doit être telle, que le quarré de la viteſſe en A moins le quarré de la viteſſe en R, ſoit égal au quarré de la viteſſe en a moins le quarré de la viteſſe en r; & qu'il en doit être de même de la couche ars par rapport à la couche immédiatement ſuivante &c.

Or cette Loi auroit lieu dans le Tourbillon, ſi toutes les couches ſe mouvoient d'un même mouvement angulaire. Car on auroit $BB - RR = (B - nds)^2 - (R - \frac{Bnds}{R})^2$.

De-là

De-là il s'enſuit, que quand toutes les couches d'un Tourbillon ſe meuvent d'un même mouvement angulaire, on a raiſon de ſuppoſer que les Canaux *Aa*, *Rr* ſont en équilibre entr'eux. Car il eſt viſible que les Canaux *AR*, *ar*, ſeront auſſi en équilibre.

Mais nous avons vu ci-deſſus, qu'un pareil Tourbillon étoit impoſſible. Donc &c.

395. Au reſte, outre l'hypotheſe dont nous venons de faire mention, il y en a un grand nombre d'autres, où l'éxiſtence du Tourbillon eſt encore impoſſible. Car ſi on vouloit, par exemple, que les viteſſes des points correſpondans, *A*, *a*; *R*, *r*; de deux couches différentes fuſſent égales entr'elles, ce qui, dans l'hypotheſe de M. *Newton* rapportée ci-deſſus (*art.* 377.) rendroit la force du frottement égale dans toutes les couches, on auroit encore l'équilibre entre les Canaux *AR*, *ar*, & entre les Canaux *Aa*, *Rr*. Or je dis que dans cette hypotheſe même, qui, comme nous l'avons vû, eſt ſujette à beaucoup de difficultés, le Tourbillon ſeroit encore impoſſible. Ce que je démontre en cette ſorte.

Comme les viteſſes dans chaque couche doivent encore ici être proportionnelles aux rayons oſculateurs, ſi on ſuppoſe que *R* repréſente la viteſſe dans la premiére couche *ARS*, αR pourra repréſenter la viteſſe dans la couche ſuivante *ars*, α étant un nombre conſtant qu'on ſuppoſe différer très-peu de l'unité. Donc ſi la Loi dont il s'agit avoit lieu, il faudroit qu'on eût

$$RR - \alpha\alpha RR = akds;$$

k repréſentant auſſi un nombre conſtant ; donc prenant $\alpha = 1 + \frac{gds}{a}$, & remarquant que $RR = (R - \frac{Bnds}{R})^2 \times 1 : (1 - \frac{BnddR}{Rds})^2 = RR - 2Bnds - \frac{2BnRddR}{ds}$, on auroit, en ſuppoſant $Bn = a$, & $k - 2 = h$

$$- ddR = \frac{aahds^2 + RRgds^2}{2aR} \dots\dots\dots\dots (V),$$

& par conſéquent l'Equation de la courbe ARS devroit être.

$$- \frac{dR^2}{2} = ds^2 (\frac{ah}{2} \log. R + \frac{gRR}{2} - mm),$$

il faudroit donc pour que le Tourbillon fût poſſible, que la courbe ars eût une Equation analogue à celle-là. Or on prouvera par une Méthode ſemblable à celle de l'*article* 392. que cela ne ſauroit être. Donc &c.

REMARQUE III.

396. En voilà, ce me ſemble, aſſez pour nous convaincre, qu'*un Tourbillon dont les couches ne ſont point circulaires ne ſauroit ſubſiſter*. Car nous avons fait voir 1°. qu'il ne pouvoit ſubſiſter dans un Fluide indéfini : 2°. que s'il étoit formé par un Fluide renfermé dans un vaſe, il falloit que toutes les couches fiſſent leurs révolutions en même tems, & que cette derniére hypotheſe renfermoit contradiction.

On pourroit encore s'y prendre d'une autre maniére, pour prouver l'impoſſibilité d'un pareil Tourbillon : voici

comment; nous avons vû que la distance d'une couche à l'autre devoit être en raison inverse du rayon de la développée. Donc si on prend trois couches AR, ar, $\alpha\varrho$ (Fig. 142) infiniment proches l'une de l'autre, il faut que Rr soit à $R\varrho :: Aa : A\alpha$, & par conséquent $Rr : Aa :: r\varrho : a\alpha$; d'où il s'ensuit que les rayons osculateurs en a, A, r, R, doivent être proportionnels. Or cela posé, on verra que l'Equation entre R & s devroit être de la même forme, que l'Equation (V) qu'on a trouvée dans l'article précedent ; & comme cette Equation (V) ne peut appartenir à toutes les couches, il s'ensuit &c.

Du mouvement & de la direction des forces dans un Tourbillon, dont les particules sont pesantes.

PROPOSITION I.

397. *Si un Fluide renfermé dans un vase, est composé de parties qui pesent chacune en particulier suivant telle direction & avec telle force qu'on voudra, & que ce Fluide vienne à former un Tourbillon par quelque raison que ce soit, je dis que la pesanteur de ses parties ne contribuera en rien à accélérer ou à retarder le mouvement du Tourbillon.*

Car le Tourbillon étant une fois formé & dans un état permanent, il est clair que les particules du Fluide, supposées animées par des forces égales à leurs forces centrifuges, combinées avec leurs pesanteurs, seroient en équilibre ; or par hypothese, elles sont en équilibre en vertu de leurs seules pesanteurs, dont elles doivent être en

équilibre en vertu de leurs seules forces centrifuges. Donc quand les particules seroient tout-à-coup dénuées de leurs pesanteurs, le Tourbillon ne laisseroit pas de subsister dans le même état. Donc &c.

PROPOS. II.

398. *Si toutes les particules d'un Tourbillon cylindrique renfermé dans un vase font leur révolution en même tems, & qu'on prenne* CB *à* CA (Fig. 144, 145, 146) *comme la pesanteur des particules est à leur force centrifuge en* A; *je dis* 1°. *que si* $CA =$ *ou* $< CB$ (Fig. 144, 145) *la pression du Fluide contre le vase sera la même que quand le Fluide étoit en repos, & pressoit le vase par sa seule pesanteur.*

2°. *Que si* $CB < CA$ (Fig. 146) *la pression du Fluide contre le vase sera plus grande, que quand le vase étoit en repos.*

Car puisque toutes les particules du Fluide tournent en même tems, leurs forces centrifuges seront comme leurs distances au centre C: or on a pris CB à CA comme la pesanteur à la force centrifuge en A; donc si on prend la ligne CB pour représenter la pesanteur, il est aisé de voir que la direction d'une particule quelconque G, en vertu de sa pesanteur & de sa force centrifuge combinées, sera la ligne GB, & que cette ligne GB marquera l'effort du point G suivant BG.

Donc 1°. si $CA = CB$ (Fig. 144), & qu'on nomme p la pesanteur, la pression du point G sera égale au poids

de la colomne AG, c'eſt-à-dire à $\frac{p \cdot AG^2}{2CA} = p \cdot AO$, préciſément *la même qu'elle ſeroit, ſi le vaſe étoit en repos.*

2°. Si $CB > CA$ (Fig. 145); alors décrivant du centre B l'Arc GN, il eſt viſible que l'effort contre le point G eſt égal au poids de la colomne AN, c'eſt-à-dire à $\frac{p \cdot (BG^2 - BA^2)}{2BC} = p \cdot AO$; encore *la même qu'elle ſeroit, ſi le vaſe étoit en repos.*

3°. Si $CB < CA$ (Fig. 146); alors la preſſion en G eſt $\frac{p \cdot BG^2}{2BC} = p \cdot BO + \frac{p \cdot (CA^2 - CB^2)}{2CB} = p \cdot BO + \frac{p \cdot BR^2}{2BC} > p \cdot AO$. Donc &c. *Ce Q. F. D.*

PROPOS. III.

399. *Soit un Tourbillon cylindrique dont les parties ne faſſent pas leur révolution en même tems, & dans lequel la force centrifuge aille en augmentant du centre vers la circonférence, & ſuppoſons que* B *ſoit le point où la peſanteur ſeroit égale à la force centrifuge; je dis que ſi* BC = *ou* > CA, (Fig. 147) *le vaſe ſupportera la même preſſion, que ſi le Fluide étoit en repos; & que ſi* CB < CA *la preſſion ſera plus grande, que quand le Fluide étoit en repos.*

1°. Il eſt facile de voir que toutes les courbes BMG ſuivant leſquelles ſont dirigées les efforts des particules, partent, ou ſont cenſées partir du point B comme de leur centre commun. Cela poſé, ſoit $BP = x$, $PM = y$, la peſanteur $= p$, la force centrifuge, variable ou conſtan-

te, $= F$; nous aurons $MR : Rm :: p - \frac{F.(b-x)}{\sqrt{[yy+(b-x)^2]}}$: $\frac{Fy}{\sqrt{[yy+(b-x)^2]}}$; d'où l'on voit que le poids de Mm eſt égal à $p\,dx + \frac{F(ydy - dx[b-x])}{\sqrt{[yy+(b-x)^2]}}$. Donc le poids de Mm eſt égal à $p . BP$, plus la ſomme des forces centrifuges du Canal CM, moins la ſomme des forces centrifuges du Canal CB.

Donc 1°. ſi $CA = CB$, l'effort contre le point G ſera le même, que ſi le Fluide étoit en repos.

2°. Si $BC > CA$, l'effort contre le point G eſt égal (Fig. 145) * à la preſſion du Canal BG moins celle du Canal BA, puiſque ſi on imagine la courbe GN perpendiculaire à toutes les courbes qui partent du point B, il eſt conſtant que le poids de BN eſt égal au poids de BG, & que la preſſion de N ſera égale à la preſſion en G, c'eſt-à-dire au poids de AN. Donc la preſſion en G eſt égale à $p . BO$, moins la ſomme des forces centrifuges du Canal BA, moins $p . BA$, plus la ſomme des forces centrifuges du Canal BA, c'eſt-à-dire égale à $p . AO$.

3°. Si $CB < CA$ (Fig. 147), alors la preſſion en G eſt égal à $p . BO$, plus la ſomme des forces centrifuges du Canal BA : mais comme les forces centrifuges depuis B juſqu'en A ſont (*hyp.*) plus grandes que la peſanteur, il s'enſuit que le poids du Canal BA eſt moindre que la ſomme des forces centrifuges dans ce Canal. Donc la preſſion en G eſt plus grande que $p(BO + BA)$, c'eſt-

* On ſuppoſe ici que BGQ ſoit une courbe.

à-dire plus grande que $p \cdot AO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

400. Dans les deux premiers cas du Theorême précedent, la pression en un point quelconque Q est égale (Fig. 144, 145) à $p \cdot AK$, moins la somme des forces centrifuges du Canal An *, & dans le troisiéme cas elle est égale à $p \cdot BK$ (Fig. 146) moins la somme des forces centrifuges du Canal Bn.

REMARQUE.

401. Pour déterminer la nature de la courbe BG, (Fig. 148) on tirera le rayon CS, & on décomposera l'action de la pesanteur suivant Su en deux autres, dont l'une soit perpendiculaire à CS, & l'autre soit dans la direction SC. On trouvera que la premiére de ces deux forces est $\frac{p \cdot St}{Su} = \frac{p \cdot PR}{CR}$, & que l'autre est $\frac{p \cdot CP}{CR}$. Si donc on suppose la force centrifuge proportionnelle à une fonction quelconque du rayon, & qu'on appelle f, la force centrifuge en A ; CA, r ; CS, z ; la force centrifuge en S, $\frac{f\varphi z}{\varphi r}$; CP, u ; on aura $Rr = \frac{-rdu}{\sqrt{[(rr-uu)]}}$; & $St\left(\frac{-rdu}{\sqrt{[(rr-uu)]}} \times \frac{z}{r}\right) : st\,(dz) :: \frac{p\sqrt{[(rr-uu)]}}{r} : \frac{f\varphi z}{\varphi r} - \frac{pu}{r}$;

* L'Arc Qn dans les Figures 144, 145 & 146, est un Arc de Cercle décrit du centre C ; dans la Figure 145, on la décrit d'un centre plus bas pour éviter la confusion.

Donc $d\left(\frac{pz\sqrt{[rr-uu]}}{r}\right)=\frac{-fz\varphi z du}{\varphi r\sqrt{[(rr-uu)]}}$.

Cette Equation a une analogie ſinguliére avec l'Equation des trajectoires dans les milieux réſiſtans. *Voyez ci-deſſus art.* 357. Toute la différence que ces deux Equations ont entr'elles, c'eſt que r dans l'une eſt a dans l'autre, que $\frac{2f}{3}$ dans la ſeconde eſt f dans la premiére, & que $\frac{z}{\sqrt{[aa+zz]}}$ eſt $\frac{\sqrt{[rr-uu]}}{r}$. Donc ſi on avoit nommé CS, u, la force centrifuge en A, $\frac{2f}{3}$, & AQ, z, on auroit eu préciſément la même Equation que celle des trajectoires dans des milieux réſiſtans.

Donc la courbe dont il s'agit ici, ſera conſtructible en différens cas qu'on trouvera par l'*article* 356.

De la preſſion d'un Tourbillon cylindrique, dont l'Axe n'eſt pas horizontal.

402. Lorſque l'Axe du cylindre eſt incliné à l'horizon, & que par conſéquent la peſanteur n'agit pas dans le plan de chaque Cercle décrit par la matiére du Tourbillon, alors pour trouver la preſſion du Fluide, on commencera par décompoſer l'effort abſolu de la peſanteur en deux autres, l'un paralléle à l'Axe, l'autre paralléle à la baſe du Cylindre. Il eſt clair que ces deux forces ſeront en raiſon donnée avec la peſanteur abſolue, & conſtantes par conſéquent. Après avoir trouvé (*art.* 398. & 399.) la

la direction des forces dans le plan de chaque Cercle parallèle à la base, on cherchera l'effort des particules du Fluide, résultant de leur effort dans le plan de chaque Cercle, & de leur effort parallèle à l'Axe, & la direction de cette pression sera suivant des courbes à double courbure, qui pourront être regardées comme autant de Canaux dans lesquels le Fluide pese.

Cela posé, si *GQAF* (Figure 149) est la section du Cylindre par un plan vertical & passant par l'Axe, & que la pesanteur en *A* suivant *AF* soit supposée égale à la force centrifuge, il est clair que la pression du Fluide contre un point quelconque *K*, sera égale à la pression qu'exerceroit le Fluide renfermé dans un Canal *AkK*, formé par la courbe *AOk*, suivant laquelle les particules pesent dans le plan du Cercle, & par la droite *kK* : or la pression du Canal *AOk* étant égale au poids du Canal *AV* suivant *AF*; & le poids des Canaux *AV*, & *kK* étant égal, comme il est aisé de le prouver, au poids absolu du Canal vertical *AR* terminé par l'horizontale *kR*, il s'ensuit que la pression du Fluide sera la même que si le Fluide étoit en repos.

Si la pesanteur en *A* suivant *AF* est plus grande que la force centrifuge, on prouvera de même que la pression en *K* sera égale à celle qu'exerceroit un Fluide renfermé dans le Canal *AZkK*. Or comme la force centrifuge qui agit perpendiculairement aux parois du Canal *AZkK*, ne sauroit augmenter la pression de ce Canal, on trouvera que la pression en *K* est égale au poids absolu du

Fff

Canal AR, comme dans le cas précedent.

Enfin, si la pesanteur en A suivant AF (Figure 150) est plus petite que la force centrifuge, & que B soit le point où ces deux forces soient égales, on trouve que la pression contre un point quelconque Q est égale au poids des Canaux BG, GQ, c'est-à-dire, plus grande que le poids absolu de la colomne AR.

Des Loix du mouvement & de l'équilibre dans le Tourbillon sphérique.

403. Nous avons vû (*article* 375) qu'un Tourbillon cylindrique pouvoit subsister dans un milieu en repos, pourvû que sa surface extérieure fût parfaitement Mathematique. Il n'en est pas de même du Tourbillon sphérique: car un pareil Tourbillon ne peut subsister dans quelque milieu & dans quelque hypothese que ce soit. Pour le faire voir, nous remarquerons que la force centrifuge de chaque particule tend à l'écarter de l'Axe, & qu'elle se décompose en deux autres forces, l'une perpendiculaire au Tourbillon, l'autre dans la direction du Meridien: or si on suppose maintenant que le Tourbillon soit renfermé dans un vase, il est constant que quand bien même les forces des particules Q suivant CQ (Fig. 151) feroient égales entr'elles, ce qui est le cas le plus favorable, le Fluide ne laisseroit pas de s'échapper par Q, si on faisoit en cet endroit une ouverture, à cause de la pression que souffre ce point Q dans la direction du Meridien, pression qui réagit (*art.* 6. & 7.) contre les parois du vase. Donc

le Fluide renfermé dans un vaſe ouvert en *Q* n'y ſeroit point en équilibre. Donc il ne ſera pas non plus en équilibre, le vaſe étant ſuppoſé détruit.

Donc *un Tourbillon ſphérique ne ſauroit ſubſiſter dans un milieu quelconque.*

PROPOS. I.

404. *Un Tourbillon ſphérique renfermé dans un vaſe ne ſauroit ſubſiſter, à moins que toutes les particules* Q, q, K, *également diſtances de l'Axe ne faſſent leur révolution en même tems.*

Car on déduit aiſément de ce qui a été démontré dans l'*article* 36. que la couche cylindrique, engendrée par la révolution de *QK* autour de *EB*, doit être également preſſée en tous ſes points. D'où il s'enſuit que les forces centrifuges doivent être égales en *Q*, *q*, *K*, & qu'ainſi les viteſſes de ces points doivent être égales entr'elles.

PROPOS. II.

405. *Pour qu'un Tourbillon ſphérique renfermé dans un vaſe, ſubſiſte dans un état permanent, il faut que toutes ſes particules faſſent leur révolution en tems égal.*

Car comme les particules ſolides du vaſe font leur révolution dans le même tems, les particules *Q* du Fluide qui ſont adhérentes au vaſe & entraînées par ſes parois, doivent auſſi faire leur révolution dans le même tems. Mais on a prouvé ci-deſſus, que toutes les particules *K*,

q, &c. devoient faire leur révolution en même tems que la particule *Q*. Donc &c.

La même chose peut se prouver encore par la Loi du frottement des différentes couches, en se servant d'une Méthode semblable à celle des *art.* 377. & 384; car on prouvera que tous les points de la colomne *QD* doivent faire leur révolution en même tems, d'où l'on conclura (*art.* 404.) que tous les autres points doivent aussi faire leur révolution dans le même tems. Je sai que M. *Newton* l. II. Prop. 52. trouve une autre Loi pour les tems périodiques des différentes couches. Mais outre que dans la supposition de M. *Newton*, la force centrifuge seroit infinie au centre, & que le Tourbillon peut encore subsister dans ses principes, en supposant un même mouvement angulaire dans toutes ses couches; il ne paroît pas qu'on puisse, comme le fait M. *Newton*, & après lui M. *Bernoulli*, regarder toutes les couches du Tourbillon comme des couches sphériques solides, dont tous les points font leur révolution en tems égal. Car il résulte de l'*art.* 404. que cette supposition n'a lieu que dans le cas, où toutes les particules du Tourbillon ont un même mouvement angulaire autour de l'Axe.

REMARQUE.

406. Présentement, si on se propose de déterminer la pression qu'un Fluide renfermé dans un vase sphérique & mû en Tourbillon exerce contre les parois du vase, lorsque ses particules sont pesantes, on commencera par ima-

giner un plan vertical qui passe par l'Axe du Tourbillon. Cela posé,

1°. Si l'Axe est horizontal, on prendra *CB* (Fig. 152) ou *Cb*, ou *Cϐ* à *CA*, comme la pesanteur à la force centrifuge en *A*; & on verra aisément, que dans tous les cas la pression du Fluide contre un point quelconque du vase, dont la projection soit *Q* sur un Cercle *bOD* perpendiculaire à l'Axe *MN*, sera la même que souffriroit le point *G* dans le Cercle *bOD*. Or cette pression a été déterminée ci-dessus (*article* 400.).

2°. Si l'Axe est incliné à l'horizon, on commencera par décomposer l'effort de la pesanteur en deux autres, l'un paralléle à l'Axe, l'autre paralléle à l'Equateur du Tourbillon; & on cherchera dans le grand Cercle vertical *MnN* (Fig. 153) le point *n* ou la direction de la force résultante de la pesanteur & de la force centrifuge, est perpendiculaire à la Sphére. Cela posé; je dis que la pression que souffrira la surface en un point quelconque *O*, sera égale à celle qu'exerceroit contre ce point *O* le Fluide renfermé dans un Canal *nQO*, formé par un Arc *nQ* du Cercle paralléle à l'Equateur *CZ*, & un Arc *QO* du Meridien *NOM* passant par le point *O*. Or la pression du Fluide renfermé dans ce Canal est aisée à déterminer par les Méthodes précedentes.

SECTION II.

Du mouvement des Corps plongés dans un Tourbillon.

PROPOSITION I.

407. *Un Corps de figure quelconque plongé dans un Tourbillon, est poussé de la circonférence au centre avec une force égale à la force centrifuge du volume de Fluide, dont il occupe la place.*

La question se réduit à prouver, que si un Corps de figure quelconque est placé dans un Fluide en repos, & dont les parties tendent à s'éloigner d'un centre avec une force connue : ce Corps tendra à descendre vers ce même centre avec une force égale à celle du volume de Fluide dont il occupe la place, c'est-à-dire, pour parler plus exactement, qu'il tendra à descendre avec la même force, que si, abstraction faite du Fluide & supposant le Corps de même densité que le Fluide, chacune des parties de ce Corps étoit animée d'une force centripete égale à la force centrifuge qu'auroient eue la partie de Fluide dont elle occupe la place ; ou enfin que ce Corps tend à descendre avec la même force qu'il auroit, si, étant d'une densité différente de celle du Fluide, sa force centripete étoit à la force centrifuge du Fluide, comme la densité du Fluide est à celle du Corps.

Or, pour peu qu'on fasse d'attention à ces deux derniéres propositions, on verra facilement que l'une & l'autre sera démontrée, dès que nous aurons prouvé qu'une

partie quelconque du Fluide étant durcie, & conservant d'ailleurs toute sa force centrifuge, elle doit demeurer en équilibre. Car si cette partie durcie est en équilibre en conservant sa force centrifuge, il est constant qu'elle resteroit encore en équilibre, sa densité étant augmentée ou diminuée, pourvû que sa force centrifuge diminuât ou augmentât à proportion. D'où il est clair qu'elle tend à descendre vers le centre avec une force égale à la force centrifuge du volume de Fluide dont elle occupe la place.

Il est facile de déduire de ce que nous avons dit (*article* 61.) que dans un Fluide qui est en équilibre, s'il s'en durcit une partie quelconque, tout le reste demeurant le même, cette partie restera en équilibre; mais comme la démonstration que nous avons donnée de cette proposition dans l'article cité, pourroit embarrasser quelques Lecteurs; nous allons prouver ici de nouveau cette même vérité d'une maniére plus sensible & plus en détail.

1°. Soient EF, AB, CD, (Figure 154) &c. les couches de niveau du Fluide; $ABCD$ une portion de Fluide infiniment petite, renfermée entre deux couches de niveau infiniment proches & infiniment petites, AB, CD, & entre deux lignes AC, BD perpendiculaires à ces couches. Comme la pression est égale à tous les points de AB, on pourra prendre $\varphi . AB$ pour la pression sur AB, & $(\varphi + d\varphi) . CD$ ou $(\varphi + d\varphi) . [AB . (1 - \frac{BD}{BH})]$ pour la pression sur CD qui agit en sens contraire; de plus, les surfaces BD, AC sont poussées suivant OG, NG, avec une

force = à $\varphi . BD$, & la force qui en réſulte ſuivant HG eſt égale à $\varphi . \frac{BD \times AB}{BH}$. donc le ſolide $ABDC$ eſt pouſſé ſuivant AB par une force qui vient de ſon propre poids & qui eſt égale à $AB . d\varphi$; & il eſt en même tems pouſſé ſuivant HG par une force égale à $\varphi . AB + d\varphi . AB - \varphi . AB \times \frac{BD}{BH} + \varphi . \frac{BD . AB}{BH} - \varphi . AB$. donc ce ſolide eſt en équilibre.

2°. Si les deux Arcs infiniment proches AB, CD n'étoient pas infiniment petits, tout ſeroit encore en équilibre. Car ſi on imaginoit, par exemple, à côté de $ABDC$ une autre petite maſſe ſolide $BbdD$, la preſſion de ces deux maſſes réunies enſemble, ne différeroit de celle qu'elles ſouffriroient étant ſéparées l'une de l'autre, qu'en ce que la preſſion en O ſuivant OG ſeroit anéantie, auſſi-bien que la force qui preſſeroit la maſſe $BbdD$ ſuivant GO; mais comme ces deux forces ſont contraires & égales, il eſt évident qu'en les ſuppoſant toutes deux exiſtantes, la maſſe $AbdC$ doit reſter dans le même état, & que chacune des deux maſſes dont elle eſt compoſée ſera dans le même état auſſi, que ſi elle étoit ſéparée de l'autre. Donc chacune en particulier ſera en équilibre. Donc &c.

3°. Je dis préſentement qu'il n'eſt pas néceſſaire pour l'équilibre de la maſſe $AbdC$, que les lignes bd, AC ſoient perpendiculaires aux couches de niveau Ab, dC; car ſoit, par exemple, la maſſe $AbdQ$ terminée par la ligne

ligne AQ, il est aisé de voir que la pression suivant $MG = \varphi . \frac{AQ \times AC}{AQ} = \varphi . AC$, & qu'ainsi elle est la même que sur AC, desorte que la pression suivant HC est seulement augmentée d'une quantité égale à la moitié de $d\varphi . QC$, c'est-à-dire au poids de AQC; & comme le poids de la masse $AbdC$ est augmenté de la même quantité, il s'ensuit &c. Il en seroit de même de l'autre côté bd.

4°. Si sur le petit solide $AQdb$ formé de deux couches de niveau infiniment proches, & de deux autres lignes quelconques, on en imagine une autre, on prouvera que l'assemblage de ces deux solides est en équilibre, par un raisonnement analogue à celui du *n.* 3. du présent article; & ainsi de suite, quel que soit le nombre de petits solides posés les uns sur les autres, & formés par des portions de couches de niveau. Or un Corps de figure quelconque peut être regardé comme l'assemblage d'une infinité de ces petits solides. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

408. Si la masse du Corps est fort petite par rapport à celle du Fluide, on pourra supposer que la force centrifuge est constante dans toutes les parties du volume de Fluide dont le Corps occupe la place, & que la force qui en résulte est égale à la somme des forces centrifuges de toutes les parties de ce volume de Fluide. Donc si on appelle f cette force centrifuge, & m la masse fluide

dont le Corps occupe la place, on pourra prendre f. *m* pour la force qui pousse le Corps vers le centre.

PROPOS. II.

409. *Dans un Tourbillon sphérique ou spheroïde, la tendance des Corps qui y sont plongés doit être vers l'Axe du Tourbillon, abstration faite de la pesanteur des parties.*

Cette proposition est si claire & si simple par elle-même qu'on ne sauroit assez s'étonner, que presque tous les Cartesiens en ayent contesté la vérité, & que d'autres, comme M. *Bulfinger*, ayent cru que l'Expérience étoit le seul moyen de la prouver. Je me contenterai donc de répondre ici aux objections de ces Auteurs, d'une maniére invincible & sans replique.

Les uns prétendent que la chûte d'un Corps *B* (Figure 155) plongé dans un Tourbillon sphérique doit se faire non vers l'Axe en *G*, mais vers le centre *C*, parce que le point *B* est pressé par la colomne *GB*, non suivant *BG*, mais suivant *CB*. Pour sentir l'absurdité d'un pareil raisonnement, il suffira de remarquer qu'il faudroit par la même raison, que dans un vase *MBD* (Fig. 156) rempli d'une liqueur pesante, un Corps *B* supposé moins pesant qu'un pareil volume de Fluide, ne montât pas suivant *BG*, mais suivant *BC*, parce que l'action de la colomne *BG* est dirigée suivant *CB*; or l'Expérience fait voir que les Corps *B* ne monte pas suivant *BC*, mais verticalement suivant *BG*. La méprise de ces Auteurs vient de ce qu'ils se contentent de considérer l'effort de la colomne *BG*

ſuivant *BC* (Figure 155) ſans faire d'attention à ſon effort ſuivant *BK*. Si on conſidére ce que produit ſur le point *B* chacune de ces deux forces, on verra qu'il eſt pouſſé à la fois ſuivant *BC* par l'action des colomnes voiſines, & ſuivant *BO* avec une force égale à l'excès de force du Canal *MA* ſur le Canal *AD*, & que la ligne *BG* ſera la tendance qu'il aura en vertu de ces deux forces.

D'autres Auteurs diſent que l'action de la force centrifuge eſt naturellement dirigée vers *BC*, parce que la matiére qui décrit le paralléle *BG* ne le décrit que par un mouvement forcé, & qu'elle tend naturellement à décrire un grand Cercle. Mais il eſt aiſé de répondre à cette difficulté, en obſervant qu'une particule quelconque *A* (Fig. 157) tend à chaque inſtant à décrire la tangente *AC*; que ſi elle étoit ſeule renfermée au-dedans du vaſe, elle décriroit le petit Arc *AD* d'un grand Cercle, & que ſa force centrifuge ſeroit exprimée par *DC*. Mais comme toutes les particules ſe nuiroient en décrivant de grands Cercles, il faut décompoſer la force ſuivant *AD* en deux autres ſuivant l'Arc du paralléle *AC*, & la petite ligne *BD*, deſorte que la particule *A* animée des forces *BD*, & *DC* doit être en équilibre. Or la force qui réſulte de ces deux-là, eſt une force qui a ſa direction vers le centre du paralléle.

Donc de quelque maniére qu'on conſidére la choſe, on voit que la force du Tourbillon tend toujours à pouſſer les Corps vers l'Axe, & non vers le centre.

REMARQUE I.

410. Quand on ſuppoſeroit que les particules du Fluide fuſſent peſantes, la propoſition précedente ſeroit encore vraye, pourvû que le Corps fût de même peſanteur ſpécifique, que le Fluide. Dans tout autre cas, on cherchera la tendance du Corps vers l'Axe du Tourbillon en vertu de la force centrifuge, & ſa tendance verticale en haut ou en bas en vertu de la peſanteur du Fluide, & la réſultante de ces deux forces ſera le chemin du Corps.

REMARQUE II.

411. M. *Bulſinger* dans la Piéce qui a remporté le prix de l'Académie en 1728. a prétendu que dans un Tourbillon qui auroit à la fois deux mouvemens autour de deux Axes, la direction des Corps qui y ſeroient plongés devroit être vers le centre. Sa raiſon eſt, que chaque particule du Fluide décriroit alors un grand Cercle : mais il eſt aiſé de prouver que les courbes décrites par les particules ne ſont point de grands Cercles, mais des courbes différentes les unes des autres, dont la plûpart ſont en 8 de chiffre ; d'où il s'enſuit que la direction des particules ne doit pas ſe faire vers le centre, puiſque ces courbes en 8 de chiffre, & autres, étant néceſſairement à double courbure, les perpendiculaires à ces courbes ne concourent pas au centre.

De la vitesse avec laquelle une masse circulaire plongée dans un Tourbillon peut tourner autour de son centre.

PROPOSITION I.

412. *Un Cercle très-petit* CAEB (Fig. 158) *étant placé dans un Fluide homogene, dont les couches se meuvent circulairement avec une vitesse proportionnelle à une fonction quelconque de leurs rayons ; si la vitesse du centre* C *est la même que celle du filet* DC ; *je dis*

1°. *Que le Cercle* CAEB *se mouvra sensiblement dans le même Cercle que le filet* DC.

2°. *Que si la vitesse des couches est proportionnelle à une puissance* m *de la distance, il fera* $\frac{m}{2}$ *révolutions autour de son centre, pendant qu'il en fera une autour du point* G, *& cela suivant* BDA *ou* ABD, *selon que le nombre* m *sera positif ou négatif.*

Car en premier lieu, les forces centrifuges du Cercle *CAB* & d'un volume de Fluide égal à celui dont il tient la place, peuvent passer pour égales, puisqu'elles ne different l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles.

En second lieu, si on prend les Arcs *DE*, *Qe*, (Figure 159) égaux entr'eux, & qu'on suppose que la vitesse des couches aille en augmentant de *B* vers *A*, l'excès de vitesse du filet *EP* sur le filet *DC* sera égal, comme il est aisé de le voir, à l'excès de vitesse du filet *DC* sur le filet *ep* : donc les points *E*, *e*, seront également

poussés, l'un suivant EC, l'autre suivant eC, & par conséquent le Fluide ne fera aucune résistance au mouvement du Cercle.

En troisiéme lieu, si on décompose la vitesse respective OE en deux autres, l'une suivant EC, l'autre suivant EK, & qu'on fasse de même pour tous les autres points, il est visible que l'action du Fluide suivant EK tend à faire tourner le Cercle dans le même sens autour de son centre. Pour déterminer la vitesse avec laquelle il doit tourner, je suppose qu'il ait déja acquis une certaine vitesse de rotation, & que le point α soit tel que la vitesse suivant αV soit égale à cette vitesse de rotation; il est visible que le Fluide ayant plus de vitesse depuis α jusqu'en A, & moins depuis α jusqu'en D, que n'en a le point α, l'action du Fluide tendra à accélérer la partie αA, & à retarder au contraire la partie αD; & le Cercle n'aura acquis une vitesse constante de rotation, que quand ces deux efforts seront égaux. Or je dis qu'ils seront égaux, si le point α est celui de 45 degrés. Car soit g la vitesse du filet CD, CG, r, CD, a, la vitesse respective en α suivant $\alpha\mathscr{C}$, sera $= \frac{mg . C\varsigma}{CG}$, & la vitesse suivant $\alpha V =$ $\frac{mg . C\varsigma^2}{CG . CD} = \frac{mga}{2r}$. Or si on prend les points E, S, également éloignés de α, on trouvera que la vitesse du point E du Fluide suivant EK, est $\frac{mg . CP^2}{CG . CD}$, & qu'ainsi la force qui pousse le point E suivant EK, est égale à une fonction

de $\frac{mg.CP^2 - mg.C\mathcal{C}^2}{CG.CD}$, & que la force qui pouſſe le point S en ſens contraire, eſt égale à une pareille fonction de $\frac{mg.C\mathcal{C}^2 - mg.Cp^2}{CG.CD}$. Or ces deux fonctions ſont égales, puiſque $CP^2 + Cp^2 = CD^2$, & que par conſéquent $CP^2 - C\mathcal{C}^2 = C\mathcal{C}^2 - Cp^2$. Donc &c.

Donc la viteſſe du Cercle pour tourner autour de ſon centre eſt $\frac{mga}{2r}$, & par conſéquent le tems d'une rotation eſt au tems d'une révolution autour du centre G, comme $\frac{2ra}{mga}$ eſt à $\frac{r}{g}$, c'eſt-à-dire comme $\frac{2}{m}$ eſt à 1. Donc il fera $\frac{m}{2}$ rotations autour de ſon centre, pendant qu'il en fera une autour du centre G.

REMARQUE I.

413. Je n'ai eu aucun égard dans la propoſition précedente à la quantité de preſſion en E & en S, pour déterminer l'action du Fluide, qui par ſon frottement accélére ou retarde le mouvement de rotation. Car 1°. la preſſion du point E réſultante de la viteſſe ſuivant EC, eſt égale à la preſſion du point S réſultante de la viteſſe ſuivant SC, puiſqu'il eſt aiſé de faire voir que ces viteſſes ſont repréſentées par les lignes égales PZ, pz. 2°. A l'égard de la preſſion des points E, S, réſultante de la force centrifuge du Fluide environnant, ces deux preſſions ſont encore égales entr'elles, ou au moins diffé-

rent si peu l'une de l'autre, qu'elles doivent passer pour égales.

REMARQUE II.

414. Ce que nous venons de dire (*article* 412.) s'applique aussi à une Sphére qui seroit plongée dans le même Tourbillon ; car soit KSR (Fig. 160) un grand Cercle dont le plan passe par le centre G, & QCO, un des paralléles ; si on décompose la vitesse respective DQ en deux autres, dans le plan du Cercle QCO suivant QC & suivant QN, il est clair que l'effort suivant QC est entiérement soutenu par un effort égal & contraire suivant qC, & qu'on ne doit avoir égard qu'à la vitesse suivant QN; or cela posé, on verra aisément par la démonstration précedente (*art.* 412.) que chacun des Cercles KSR, QCO parvenu à une vitesse de rotation constante, fera $\frac{m}{2}$ révolutions autour de son centre, pendant que le centre C de la Sphére en fera une autour de G. Donc &c.

REMARQUE III.

415. Pour déterminer la force qui anime à chaque instant la masse circulaire, & la sollicite à tourner autour de son centre, & trouver par-là les accroissemens infiniment petits de la vitesse de rotation à chaque instant ; on nommera CP, x, (Fig. 159) la vitesse de rotation u, & l'on aura $\int(\frac{adx}{\sqrt{[aa - xx]}} \times 2\varphi[\frac{mgxx}{ar} - u])$ pour la force qui

qui anime la masse à tourner à chaque instant. On intégrera cette quantité en ne faisant varier que x, & faisant $x = a$, on aura l'intégrale complette : ensuite si on nomme s l'espace qu'un point quelconque E a parcouru en tournant autour du centre C, on fera la force totale égale à $\frac{udu}{ds}$.

Si on suppose que la force qui agit à chaque point E soit proportionnelle à la vitesse, l'expression précedente deviendra $2\int([\frac{gmxx}{ar} - u] \cdot \frac{adx}{\sqrt{[aa - xx]}})$, dont l'intégrale est $- \frac{2mg . ACD}{r} + \frac{2mg}{r} \times AC . ASD - 2u . ASD = 4 ASD \times (\frac{gma}{4r} - \frac{u}{2})$. D'où l'on voit que dans cette hypothese la force qui anime la masse AQD à tourner autour de son centre, est la moitié de celle qui animeroit cette même masse à tourner autour de son centre, si elle étoit au centre d'un Tourbillon dont la couche contigue à la surface du Cercle AQD seroit mûe avec une vitesse constante $= \frac{gma}{2r}$; & que la vitesse de rotation sera dans l'un & l'autre cas $\frac{gma}{2r}$, avec cette différence, que dans le premier cas elle ne sera engendrée qu'après un tems double de celui pendant lequel elle seroit engendrée dans le second cas.

Au reste, l'hypothese que la force accélératrice soit proportionnelle à la vitesse simple, ne doit pas être prise

à la rigueur; autrement, la masse circulaire *AQBD* ne parviendroit à une vitesse constante de rotation qu'après un tems infini; ce qui est contre l'Expérience.

REMARQUE IV.

416. En général, quelle que soit la vitesse du centre *C* par rapport au filet *DC*, si le Cercle a autour de son centre une vitesse égale à $\frac{mga}{2r}$, & qu'on suppose la force du frottement proportionnelle à la simple vitesse, on peut démontrer aisément que l'action du Fluide pour accélérer ou retarder le mouvement de rotation, est nulle; car soit g la vitesse du centre *C*, & on trouvera que la vitesse du Fluide suivant *EK* est $(g + \frac{mg.CP}{CG} - g) \times \frac{CP}{CD}$, & prenant $C\pi = CP$, on aura la vitesse suivant ek $= (g - \frac{mg.C\pi}{CG} - g) \times \frac{C\pi}{CD}$: si on retranche de l'une de ces deux vitesses la vitesse de rotation $\frac{mga}{2r}$, & qu'on l'ajoute à l'autre, qu'ensuite on prenne la différence des deux, on aura $2\left(\frac{mg.CP^2}{CG.CD} - \frac{mga}{2r}\right)$ pour la force qui tend à accélérer le point *E*, ce qui est précisément la même chose que dans l'*article* 412.

Nous avons supposé que le Fluide en e allât plus vîte que le Cercle. S'il alloit plus lentement, il est clair que ce seroit le point *e* qui seroit frappé, la vitesse suivant

ek étant $(g - g + \frac{mg \cdot C\pi}{CG}) \times \frac{C\pi}{CD}$, & que l'action suivant ek devroit alors s'ajouter à l'action suivant EK; ce qui ne changeroit rien aux calculs précedens.

Tout ce que nous venons de dire est encore vrai pour la Sphére, comme on le peut voir aisément.

REMARQUE V.

417. Si dans le cas de l'*article* 412. on suppose que le Fluide ne soit pas uniforme, mais que sa densité, par exemple, aille en diminuant de A vers B, alors il est visible que le point E sera frappé suivant EC avec plus de force que le point e n'est frappé suivant eC: qu'ainsi le Cercle QDA ne peut plus se mouvoir circulairement autour du centre G, à moins qu'on ne suppose 1°. que le point C ait plus de vitesse que le filet DC. 2°. Que cette vitesse soit telle, qu'en décomposant chaque effort suivant EC en deux autres, l'un suivant CB, l'autre suivant CQ, la somme des efforts suivant CQ soit nulle, & que la somme des efforts suivant CB retranchée ou ajoutée à la force centrifuge du Cercle, soit égale à la force centrifuge d'un égal volume de Fluide placé à la distance CG du centre G.

Soit $CK = \alpha$, (Fig. 161) l'abscisse qui répond au point L où la vitesse du Fluide est égale à celle du centre C; $g + \frac{mg\alpha}{r}$ sera la vitesse du centre C suivant CQ, & la somme des efforts suivant CQ résultans de la résistance faite à l'Arc LM sera $\int\int(\frac{mgx - mg\alpha}{r})^2 \times \frac{dx \cdot (aa - xx)}{a^2} \times$

$[\delta + \frac{\delta n x}{r}])$, dans laquelle la quantité $\delta + \frac{\delta n x}{r}$ eſt proportionnelle à la denſité, parce qu'on ſuppoſe que la denſité du filet qui répond à C ſoit δ, & que la denſité augmente en raiſon des puiſſances n des diſtances au centre. On cherchera de même l'effort ſuivant QC réſultant de la réſiſtance faite à l'Arc λN, & on ſuppoſera que cet effort ajouté avec celui qui vient de la réſiſtance faite à l'Arc LM, ſoit égal à zero.

Maintenant ſi on ſuppoſe que Δ ſoit la denſité du Cercle, ſa force centrifuge ſera $(gg + \frac{2mgg\alpha}{r}) \times \Delta$, & cette force étant ajoutée à l'effort ſuivant CM réſultant de la réſiſtance du Fluide aux Arcs $ML, \lambda N$, il faudra ſuppoſer la ſomme de ces efforts égale à la force centrifuge δgg du Fluide.

On aura donc deux Equations par le moyen deſquelles on déterminera deux quelconques des quatre quantités δ, Δ, α, & n, les deux autres étant données.

Pour trouver avec quelle viteſſe le Cercle doit tourner ſur ſon centre, on nommera u ſa viteſſe de rotation dans un inſtant quelconque, & on obſervera que la force qui ſollicite un de ſes points quelconques à tourner, eſt $[\frac{gmx - gma}{r} \times \frac{x}{a} - u] \cdot \frac{adx}{\sqrt{[aa - xx]}} \times (\delta + \frac{\delta n x}{r})$. On intégrera cette quantité en ne faiſant varier que x, & après avoir completté l'intégrale qui doit être zero, lorſque $x = \alpha$, on ſuppoſera cette intégrale $= 0$ lorſque $x = a$, ce qui donnera la viteſſe de rotation cherchée. Car la

vitesse de rotation commence à être constante dans l'instant où la force qui la produit est nulle.

REMARQUE VI.

418. Nous avons déterminé dans l'*art.* 412. quelle doit être la vitesse de rotation constante du Cercle, pour que la vitesse respective du Fluide tende également à accélérer & à retarder ce mouvement de rotation : il y a encore un autre cas où le Cercle conserveroit une vitesse de rotation constante, c'est celui où la vitesse respective de chaque filet du Fluide OE seroit nulle.

Pour trouver quelle doit être alors la vitesse de rotation, nous nommerons u cette vitesse, g la vitesse du centre C (Fig. 158), g la vitesse du filet circulaire dont le rayon est CG : la vitesse du filet dont le rayon est GE, sera $\frac{g \times (rr + 2rx + aa)^{\frac{m}{2}}}{r^m}$; la vitesse qui en résulte suivant $EP = \frac{g.(r+x).(rr+2rx+aa)^{\frac{m-2}{2}}}{r^m}$; & la vitesse qui en résulte suivant $EN = \frac{g\sqrt{(aa-xx)}.(rr+2rx+aa)^{\frac{m-2}{2}}}{r^m}$.

Présentement, la vitesse du point E du Cercle suivant EP, résultante de la vitesse u combinée avec son mouvement progressif, est g $+ \frac{ux}{a}$; & la vitesse suivant $EN = \frac{u\sqrt{[aa-xx]}}{a}$. Il faut que les vitesses du Fluide & du Corps suivant EP & EN, soient égales, quelque valeur

qu'on donne à x. D'où l'on tire en ſuppoſant a infiniment petite, 1°. $g = g$; 2°. $u = \frac{ga}{r} + \frac{ga \times (m-1) . r^{m-1}}{r^{m-1}} = \frac{mga}{r}$; 3°. $u = \frac{ga}{r}$.

De-là il s'enſuit, qu'en ſuppoſant même a infiniment petite par rapport à r, il n'y a qu'un ſeul cas où l'on puiſſe trouver dans l'hypotheſe préſente une viteſſe conſtante de rotation, ſavoir celui où $m = 1$, c'eſt-à-dire, où toutes les couches font leur révolution en même-tems. Dans ce cas, la viteſſe conſtante de rotation eſt double de celle qu'on a trouvée (*article* 412.).

Nonſeulement il n'y a qu'un cas où l'on puiſſe trouver une viteſſe de rotation conſtante dans l'hypotheſe que la viteſſe reſpective du Fluide ſoit nulle, mais encore, il eſt néceſſaire pour que le Cercle ait cette viteſſe, qu'elle lui ait été imprimée au commencement de ſon mouvement ſans que le Fluide y ait contribué. Car ſi on n'imprime au Cercle aucune viteſſe de rotation, mais ſimplement la viteſſe progreſſive g, l'action du Fluide tendra toujours à lui imprimer une viteſſe de rotation telle qu'elle a été déterminée dans l'*article* 412.

On peut donc conclure de-là, que le Cercle n'aura la viteſſe de rotation $\frac{mga}{r}$ en vertu de l'action du Fluide, que quand les particules du Fluide feront toutes leurs révolutions en même tems, & qu'outre cela, elles auront entr'elles un certain degré de tenacité, qui les empêchera

de pouvoir couler librement ſur la ſurface ADQ ſuivant EK, & de produire par ce mouvement la viteſſe de rotation $\frac{mga}{2r}$.

REMARQUE VII.

419. M. *de Mairan* dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'année 1729, a tenté d'expliquer par les Tourbillons la rotation des Planettes. Selon lui, l'Hemiſphére inférieur d'une Planette, celui qui eſt le plus près du centre du Tourbillon, eſt plus peſant que l'Hemiſphére ſupérieur; cela poſé, M. *de Mairan* prétend que l'impulſion relative du Fluide contre l'Hemiſphére ſupérieur, ſera plus grande que ſon impulſion contre l'Hemiſphére inférieur; cet Hemiſphére fera donc plus de chemin à proportion que l'autre, d'où il s'enſuit que la Planette tournera ſur ſon Axe d'Occident en Orient, dans le même ſens qu'elle tourne autour du Soleil.

Quelque ingénieuſe que puiſſe paroître cette explication, je crois qu'on aura lieu de douter qu'elle ſoit ſolide, ſi on l'examine ſuivant les Principes de la Méchanique. En effet, c'eſt une vérité inconteſtable, que *ſi tant de forces qu'on voudra agiſſent ſur un Corps, & que la direction de la force réſultante du concours d'action de ces forces paſſe par le centre de maſſe du Corps, ce Corps ſe mouvra en ligne droite ſans tourner autour de ſon centre.* * Cela poſé, je dis que dans les Principes même de M. *de Mairan*, la Planet-

* Voyez le *Traité de Dynamique*, ſeconde Partie, Ch. II.

te ne doit point tourner sur son centre. Car imaginons pour un moment que les deux Hemisphéres de la Planette soient dénués de leurs pesanteurs ; comme l'inégalité de la pesanteur est la seule cause d'où M. *de Mairan* déduit la rotation, on doit conclure que la Planette devroit alors ne pas tourner son centre. Remettons maintenant la Planette dans son état de pesanteur naturelle, je dis qu'elle n'en tournera pas plus pour cela. Car 1°. on ne peut pas dire que les deux Hemisphéres soient inégalement pesans, quoique le Fluide inférieur ait plus de force centrifuge que le Fluide supérieur, parce que l'action du Fluide se fait suivant des lignes perpendiculaires à la surface du Globe, & que toutes ces perpendiculaires concourent au centre. 2°. Quand bien même on supposeroit que chaque partie de l'Hemisphére inférieur pesât vers le Soleil avec plus de force que les parties de l'Hemisphére supérieur, il est constant que toutes les parties également éloignées du centre peseroient également, qu'ainsi la force résultante de toutes ces pesanteurs passeroit toujours par le centre de masse du Corps. Il me semble que ce qui a trompé M. *de Mairan*, c'est qu'il a imaginé que les deux Hemisphéres, supposés d'une pesanteur inégale, étoient dans le même cas, que si, ayant une égale pesanteur, l'inférieur étoit plus dense que le supérieur. Ce qui est néanmoins fort différent, puisque dans le premier cas le centre de masse ne change point, & qu'il change dans le second.

M. *Bernoulli* va encore beaucoup loin dans sa *nouvelle Physique*

Physique Celeste qui a partagé le prix de l'Académie en 1734 ; car après avoir fait plusieurs objections contre la Théorie de M. *de Mairan*, fort différentes de celles que nous venons de proposer : il finit ces observations par dire, qu'*il sera bien surpris quand il apprendra*, qu'un Globe creux, chargé de Mercure dans sa partie inférieure, & exposé au courant d'un Fluide, tournera autour de son centre.

Du mouvement non circulaire d'une Sphère dans un Tourbillon.

PROPOSITION I.

420. *Un Globe très-petit étant plongé dans un Fluide qui se meut en Tourbillon, l'impulsion qu'il reçoit de la force centrifuge du Fluide est à celle qu'il reçoit de la vitesse actuelle du même Fluide, comme les $\frac{8}{3}$ du diamétre du Globe, est à sa distance au centre du Tourbillon.*

Soit u la vitesse du Fluide, F la force résultante de l'impulsion, f la force centrifuge d'un volume de Fluide égal au Globe, & δ le diamétre du Globe, on aura par la Propos. 38. l. II. des Principes de M. *Newton*, $uu = \frac{8F\delta}{3}$. Mais si on nomme x la distance du Globe au centre du Tourbillon, on a $uu = fx$. donc $f : F :: \frac{8}{3}\delta : x$.

Si le Fluide n'est pas de la même densité que le Globe, l'analogie précedente est encore vraye, puisque la force

de l'impulsion du Fluide & la force centrifuge sont toujours proportionnelles à la densité.

M. *Daniel Bernoulli* a démontré cette même Proposition. *To. II. des Mém. de Petersbourg.*

REMARQUE.

421. On a supposé dans la Proposition précedente, que la force de l'impulsion du Fluide étoit comme le quarré de sa vitesse; mais si on veut qu'elle soit comme une puissance quelconque n de la vitesse, en ce cas, on supposera que F, φ soient les résistances que feroit le Fluide à une même vitesse donnée g, la premiére dans le cas de $n = 2$, la seconde dans le cas de $n =$ à un nombre quelconque : l'on aura $F = \frac{Fuu}{gg}$; & la résistance pour la vitesse u dans le cas de $n =$ à un nombre quelconque, sera $\frac{\varphi u^n}{g^n}$. Donc si on nomme π cette résistance, on aura $F = \frac{Fuu}{gg} = \frac{Fuu}{gg} \times \frac{\pi g^n}{u^n \varphi}$. donc $f : \pi :: \frac{8}{3} \delta : \frac{\varphi u^{n-2}}{F g^{n-2}} x$: donc si on regarde la quantité g, & par conséquent les quantités F, φ, comme finies, & qu'on suppose x infiniment grande par rapport à δ, il est évident que le rapport de f à π sera fini, ou infiniment petit, ou infiniment grand, selon que le rapport de $u^{n-2}\, x$ à $g^{n-2}\, \delta$ sera fini, ou infiniment petit, ou infiniment grand.

Donc si $n < 2$, il faut que la vitesse u soit infiniment petite, pour que le rapport des deux forces soit fini.

PROPOS. II.

422. *Trouver l'intégrale de* $\frac{dt}{\sqrt{[2et - tt + q]}}$, e *exprimant une constante, & q une très-petite fonction de* t.

Soit $AP = t$ (Figure 162) : du rayon e soit décrit le demi-Cercle AMO, dont l'Ordonnée $PM = \sqrt{[2et - tt]}$, & soit $Pm = \sqrt{[2et - tt + q]}$. La question se réduit à trouver la somme des $\frac{Pp}{Pm}$: or $\frac{Pp}{Pm} =$ $\frac{m\mu}{mK} = \frac{m\mu}{mT - TK} = \frac{m\mu}{mT} + \frac{m\mu . TK}{mT . (mT - TK)} = \frac{m\mu}{mT} + \frac{Ki}{mK}$; dont l'intégrale est l'angle AKm, plus la somme des Ki divisés par la ligne mK, qui peut passer pour constante & égale au rayon e. Or $Ki = \frac{Kk . Pm}{mK} = \frac{\sqrt{[2et - tt]}}{e} \times d\left(\frac{dq}{2dt}\right)$; donc si on fait $dq = ndt$, on aura l'intégrale cherchée égale à l'angle $AKm + \int \frac{dn . \sqrt{[2et - tt]}}{2ee}$.

COROLLAIRE I.

423. Soit $\frac{dt}{\sqrt{[2et - tt + ptt]}}$, p exprimant un nombre très-petit. Si on appelle l'angle droit A, & qu'on mette cette quantité sous la forme suivante $\frac{dt}{\sqrt{[1 - p]} . \sqrt{\left[\frac{2et}{1 - p} - tt\right]}}$, on trouvera que l'intégrale complette, est $\frac{2A}{\sqrt{[1 - p]}} =$

$2A.(1+\frac{p}{2})$. En ſuivant la méthode précedente, on trouve $n = 2t$, & l'intégrale complette $= 2A + \int \frac{dt\sqrt{[2et-tt]}}{ee} = 2A + pA$, ce qui revient au même.

REMARQUE.

424. Si on ſuivoit la méthode qui ſe préſente naturellement pour trouver l'intégrale de $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt+ptt]}}$, on ſuppoſeroit cette différentielle égale à $\frac{dt}{\sqrt{[2et-tt]}} = \frac{pttdt}{2.(2et-tt)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale eſt $2A + pA - \int \frac{petdt}{(2et-tt)^{\frac{3}{2}}}$. Or cette derniére quantité affectée du ſigne $\int$ ne devient point $= 0$, lorſque $t = 2e$. D'où l'on voit que l'intégrale priſe ſuivant cette Méthode n'eſt point exacte. L'erreur vient de ce qu'en ſuivant cette Méthode, on ſuppoſe que ptt eſt toujours infiniment petite par rapport à $2et - tt$. Or lorſque t eſt preſque égal à $2e$, non-ſeulement ptt n'eſt plus infiniment petite par rapport à $2et - tt$, mais encore elle peut être infiniment plus grande. Cette maniére de prendre l'intégrale ne ſauroit donc s'étendre que juſqu'à un certain point Q placé à une diſtance finie, mais très-petite du point B: deſorte qu'on ne ſauroit ſuppoſer $t = 2e$ dans l'intégrale, ſans négliger l'angle infiniment petit RCB qui doit y entrer, & auquel il n'eſt pas permis de n'avoir point d'égard, parce que l'intégrale cher-

chée ne différe de $2A$ que d'une quantité infiniment petite du même ordre, que cet angle *RCB*.

COROL. II.

425. L'intégrale exacte de $\frac{dt}{\sqrt{[2et - tt + q]}}$, en prenant pour Ki & mK leurs valeurs rigoureuses, & faisant $dn = \mathrm{n}dt$, est $2A + \int \frac{\mathrm{n}dt\sqrt{[2et - tt + q]}}{2(ee + \frac{nn}{2} + q)}$. Si on veut pousser la précision jusqu'aux secondes différences, on changera la quantité précedente, qui est sous le signe $\int$, en $\int \frac{\mathrm{n}dt\sqrt{[2et - tt + q]}}{2ee} - \int ([\frac{nn}{2} + q] \cdot \frac{\mathrm{n}dt\sqrt{[2et - tt]}}{2e^4})$.

Pour avoir l'intégrale de la premiére de ces deux quantités, on peut supposer ici $\sqrt{[2et - tt + q]} = \sqrt{[2et - tt]} + \frac{q}{2(2et - tt)^{\frac{1}{2}}}$. Il est bien vrai que cette supposition n'est légitime, que tant que t n'est pas infiniment peu différente de e. Mais lorsque t différe infiniment peu de e, on peut prendre l'intégrale pour ce qu'elle est, lorsque $t = 2e$. Car il n'en est pas ici comme dans l'*article* 424. ou en faisant cette supposition, on négligeoit des quantités ausquelles il falloit avoir égard. Les quantités qu'on négligera ici, seront de l'espece de *KOQ*, c'est-à-dire infiniment petites du troisiéme ordre.

Si cependant quelqu'un avoit du scrupule sur cette Méthode, en ce cas il pourroit lui subsister la suivante. On supposera $2et - tt + q = 0$, & on trouvera une

valeur de t infiniment peu différente de $2e$, que j'appellerai $2e + \alpha$. Ensuite, on supposera $\sqrt{[2et - tt + q]} = \sqrt{[(2e + \alpha)t - tt + q - \alpha t]}$: or lorsque $t = 2e$, la quantité $q - \alpha t$ est infiniment petite du second ordre, étant la différence infiniment petite de deux quantités infiniment petites du premier ; car α est égal (à un infiniment petit du second ordre près) à ce que devient la quantité $\frac{q}{2e}$ lorsque $t = 2e$. Donc on pourra supposer le second membre de la quantité précedente, égal à $\sqrt{[(2e + \alpha)t - tt]} + \frac{q - \alpha t}{2\sqrt{[(2e + \alpha)t - tt]}}$, sans avoir aucune erreur à craindre.

PROPOS. III.

426. *Une très-petite Sphère* A (Fig. 163) *étant poussée suivant une direction quelconque* AL *dans un milieu composé de couches circulaires concentriques & de densité variable, mues autour de leur centre commun* C, *trouver la courbe* AOB *que cette Sphère doit y décrire, en supposant que les aires* CON *parcourues à chaque instant par son rayon vecteur* CO *soient proportionnelles aux tems employés à les parcourir.*

Pour que les Aires ou Secteurs *CON* soient proportionnels aux tems, il faut, comme l'a démontré M. *Newton*, que la force qui contraint le mobile de circuler sur l'Orbite *AOB* soit continuellement dirigée vers le centre *C*. Or 1°. la force centripete du mobile, qui résulte

de la force centrifuge du Tourbillon, eſt toujours dirigée vers le centre C. 2°. Si ſur le petit Arc OM on prend OM à ON, comme la viteſſe du Fluide ſuivant OM eſt à celle du mobile ſuivant ON, la ligne NM ſera (*art.* 348) la direction de l'effort réſultant de la réſiſtance du Fluide. Donc cette ligne NM doit être paralléle à OC: donc abaiſſant du centre C la perpendiculaire CZ ſur la tangente OQ, on aura $OM : ON :: CQ : CO :: \frac{1}{CO} : \frac{1}{CQ}$. Donc la viteſſe du Fluide doit être à celle du mobile, comme $\frac{1}{CO}$ à $\frac{1}{CQ}$: & comme la viteſſe du mobile eſt dans tous les points O de l'Orbite proportionnelle à $\frac{1}{CQ}$, il s'enſuit que la viteſſe de chaque couche circulaire doit être comme $\frac{1}{CO}$, c'eſt-à-dire en raiſon inverſe du rayon.

Donc la viteſſe initiale imprimée à la Sphére ſuivant AL doit être à la viteſſe de la couche circulaire dont le rayon eſt CA, comme le Sinus total eſt au Sinus de l'angle CAL, & par conſéquent ces viteſſes doivent être égales, ſi l'angle CAL eſt droit.

Soit à préſent a le rayon de la couche circulaire dont la denſité eſt égale à celle de la Sphére, f la force centrifuge d'un volume de matiére de cette couche, égal au rayon de la Sphére, f l'action que ce même Fluide exerceroit contre la Sphére, s'il la frappoit avec une viteſſe g, & s'il étoit d'une denſité égale à celle de la cou-

che dont le rayon eſt a. Nommons enſuite OC, x, MN, dx, OM, $dy = \frac{zdx}{a}$, CZ, p ; enfin ſuppoſons que les denſités varient comme une fonction Ψx des diſtances, & que la réſiſtance ſoit comme une fonction quelconque de la viteſſe. Si on ſe ſert du Principe ordinaire des forces accélératrices, & qu'on remarque que la viteſſe u du mobile en un point quelconque O, eſt $\frac{ga}{p}$, ou $\frac{ga\sqrt{[(aa+zz)]}}{xz}$, & que $gg = \frac{fa}{m}$ * l'on aura l'Equation ſuivante

$$\frac{fa^3 dx \Psi x}{\Psi a \,.\, x^3} - \frac{f dx \Psi x}{\varphi g \Psi a} \times \varphi\left(\frac{gaa}{xz}\right) = -\frac{fa}{2}.d\left(\frac{a^4}{xxzz} + \frac{aa}{xx}\right) \ldots (I).$$

COROLLAIRE I.

427. Cette Equation eſt conſtructible en pluſieurs cas, par exemple, ſi $\Psi x = \Psi a$, c'eſt-à-dire, ſi la denſité eſt conſtante, quelle que ſoit d'ailleurs la fonction φ.

COROL. II.

428. Si on ſuppoſe non-ſeulement la denſité conſtante, mais encore la réſiſtance comme une puiſſance de la viteſſe, & que $x = b$ & $z = h$ au commencement du mouvement, on aura

$$\frac{f(x-b).(2-n)}{fa} = \frac{a^{2(2-n)}}{(zx)^{2-n}} - \frac{a^{2(2-n)}}{(bh)^{2-n}};$$

d'où l'on voit que ſi $n = 3$, & que le mobile monte, la

* *Hugh. de vi centrifugâ. Theor.* 5.

courbe

courbe ſera une *ſpirale Logarithmique* en certains cas. Car la réſiſtance s'ajoutant alors à la force centrifuge, on aura $\frac{f(x-b)}{fa}=\frac{xz-bb}{aa}$: donc ſi $\frac{f}{f}=\frac{a}{b}$, on aura $z=h$.

Il faut cependant remarquer, que pour que le mobile décrive une telle ſpirale, il eſt néceſſaire, non-ſeulement que le mobile s'éloigne du centre du Tourbillon, & que $\frac{f}{f}=\frac{a}{b}$, il faut encore que la viteſſe du Tourbillon ſoit très-petite. Car comme par l'Equation $\frac{f}{f}=\frac{a}{b}$, le rapport de f à f doit être fini, & que le mobile eſt ſuppoſé infiniment petit, il s'enſuit que la viteſſe du Tourbillon doit être infiniment petite (*article* 421.).

PROPOS. IV.

429. *Trouver le mouvement des apſides dans l'hypotheſe que la réſiſtance du Fluide ſoit comme le quarré de la viteſſe, & que l'Orbite différe infiniment peu d'un Cercle.*

1°. Si la denſité eſt conſtante, c'eſt-à-dire, ſi $\Psi x=\Psi a$, il eſt aiſé de voir qu'on aura $\frac{a^4}{xxzz}.c^{-2f(x-b):fa}$ égale à une conſtante, & qu'il n'y aura point pour lors d'apſides dans l'Orbite, parce que z ne ſera jamais infinie.

2°. Si la denſité des couches eſt variable, & qu'on ſuppoſe l'Orbite preſque circulaire, il eſt clair que x devra différer infiniment peu de a, car la Sphére devra être placée à une diſtance très-petite de la couche où le

Kkk

Fluide a la même denſité qu'elle. Suppoſons donc que la valeur de x à l'origine de la courbe ſoit $a + e$, & que ſa valeur générale ſoit $a + e - t$, e & t étant des quantités très-petites; & imaginons que $\Psi x = \Psi a + r.(e - t) \times A + s.(e - t)^2 . A$, on aura $zz = a^4 . c^{2ft:fa}$ diviſé par $(a + e - t)^2 \times \int [\frac{-2aadt}{(a+e-t)^3} \times (\frac{-r.(e-t)^2 A}{\Psi a} - \frac{s.(e-t)^2 A}{\Psi a}) \times c^{2ft:fa}]$.

J'ai pouſſé la préciſion juſqu'aux quantités infiniment petites du ſecond ordre dans la valeur de Ψx, parce que cette préciſion eſt néceſſaire dans le cas où $c^{2ft:fa}$ eſt infiniment peu différente de l'unité.

Lorſque t n'eſt pas aſſez petite par rapport à $\frac{fa}{f}$ pour que l'on puiſſe ſuppoſer $c^{2ft:fa} = 1$, alors on trouvera après en avoir fait le calcul, que la connoiſſance du mouvement des apſides dépend de l'intégration d'une quantité de la forme ſuivante $dt : \sqrt{(\alpha [1 - c^{nt}] - t)}$, dans laquelle α & n ſont des conſtantes.

Si t eſt aſſez petite pour qu'on puiſſe ſuppoſer $c^{2ft:fa} = 1 + \frac{2ft}{fa}$, alors on trouvera après en avoir fait le calcul par la Méthode expliquée dans l'*art.* 422, & en ſuppoſant $\Psi x = x^n$, que la diſtance d'une apſide à l'autre eſt égale à 180^d. diviſés par $\sqrt{n}$, c'eſt-à-dire préciſément la même que ſi le Fluide ne réſiſtoit pas.

Remarque I.

430. Au reſte, il y a une choſe importante à remarquer dans la ſolution de ce Problême. On a vu (*art.* 420) que $fa = \frac{8f\delta}{3}$. donc pour réduire $c^{2ft:fa}$ à $1 + \frac{2ft}{fa}$, il faut que t ſoit infiniment plus petit que $\frac{4\delta}{3}$; c'eſt-à-dire que $\frac{4\delta}{3}$ ſoit infiniment grand par rapport à $2e$. Car la plus grande valeur de t eſt environ $2e$.

Mais de la ſuppoſition que t ſoit infiniment plus petite que δ, il naît autre inconvénient, c'eſt que $2e$ devant être infiniment moindre que δ, le Sinus du plus grand angle de l'Orbite avec la couche, ſe trouve infiniment plus petit que δ, en prenant a pour Sinus total. Car la plus grande valeur de z eſt alors $\frac{aa}{e\sqrt{n}}$, comme il eſt aiſé de le prouver. Or nous avons fait voir ci-deſſus (*art.* 353.) que quand l'angle NOM que fait la direction du Fluide avec celle du Cercle eſt infiniment petit, on ne peut plus ſuppoſer que NM ſoit la direction ſuivant laquelle le Fluide réſiſte.

D'où l'on voit que la ſolution du Problême ne peut plus paſſer pour exacte, lorſque t eſt infiniment petite par rapport à δ; & qu'elle n'eſt même exacte que quand $2e$ eſt infiniment grande par rapport à δ; encore ne peut-on déterminer alors exactement les points de la courbe proche des apſides, parce que l'angle NOM y eſt trop petit.

Cela n'empêche pas néanmoins, que ce que nous avons dit ſur le mouvement des apſides dans le cas où t eſt infiniment petit par rapport à δ, ne puiſſe être regardé comme vrai. Car alors l'impulſion du Fluide, réſultante de l'obliquité du mouvement de la Sphére, eſt infiniment petite par rapport à la force centrifuge, & ainſi le mouvement des apſides eſt le même à très-peu de choſe près, que ſi le milieu ne réſiſtoit pas.

Remarque II.

431. Lorſque le milieu ne réſiſte pas, il n'y a qu'à ſuppoſer $f = 0$, & l'on verra que pour trouver le mouvement des apſides, il ſuffira d'intégrer la quantité adt: $[(a+e-t)^2 . \sqrt{}[\frac{(2ret - rtt) . Aa}{\Upsilon a} + \int k (e-t)^2 dt]$ dans laquelle k éxprime une quantité conſtante, & dont on trouvera facilement par l'*article* 422. que l'intégrale eſt $\frac{180^\circ \sqrt{\Upsilon a}}{\sqrt{rA}}$.

Cette Méthode a, ce me ſemble, un avantage ſur celle que M. *Newton* a donnée l. I. Sect. IX. de ſes Principes, en ce qu'elle fait voir que l'expreſſion de la diſtance des apſides eſt la véritable à un infiniment petit du ſecond ordre près ; ce qui ne paroît pas réſulter de la Théorie de M. *Newton*, qui ſemble au contraire ne donner cette diſtance qu'à un infiniment petit du premier ordre près. Il eſt vrai que cet inconvénient n'eſt rien, lorſque la force centripete eſt comme une ſimple puiſſance

de la diſtance ; mais il commence à ſe faire ſentir lorſqu'elle eſt comme $bx^m + cx^n$, ainſi que M. *Newton* le ſuppoſe Ex. III. & lorſque c eſt infiniment moindre que b. Car alors on trouve pour la diſtance d'une apſide à l'autre un angle qui ne différe que d'un infiniment petit du premier ordre, de celui qu'on auroit trouvé dans le cas de $c = 0$. Mais comme on ne ſait pas ſi dans le cas de $c = 0$ on n'eſt pas éloigné du vrai angle d'un infiniment petit du premier ordre, en ſuivant la Méthode de M. *Newton*, il paroît qu'on n'eſt pas aſſuré alors de l'exactitude de la ſolution. On ſera encore plus confirmé dans ce doute, ſi on fait attention que dans la ſolution du Problême, M. *Newton* néglige la quantité bXX, & conſerve cependant la quantité cX, qui eſt du même ordre que bXX lorſque c eſt infiniment petite par rapport à b.

Des cas où l'on peut conſtruire l'Orbite, lorſque la réſiſtance eſt comme la quatriéme puiſſance de la viteſſe.

432. Si dans l'Equation (I) de l'*article* 426. on ſuppoſe $\Psi x = x^n$ & $\varphi g = g^4$, & que l'on faſſe outre cela $\frac{a^4}{xxzz} = v$, & $v = px^r + qx^s t$, elle ſe changera dans l'Equation ſuivante

$2a^{2-n} x^{n-3} dx + 2a^2 x^{-3} dx - \frac{2fx^n dx}{fa^{n+1}} \times (ppx^{2r} + 2pqx^{r+s}t + qqx^{2s}tt) + prx^{r-1}dx + qsx^{s-1}tdx + qx^s dt = 0$. Il n'eſt plus queſtion maintenant que de chercher les cas où l'on peut conſtruire cette Equation.

Je remarque d'abord qu'elle fera conftructible, fi tous les termes où il n'y a que la variable x avec fa différence dx & des conftantes, fe détruifent mutuellement.

1°. Il eft inutile de comparer le terme où eft $x^{n-1}dx$ avec celui où eft $x^{-1}dx$, parce que cette comparaifon donne $n = 0$; & qu'on a déja vu (*art.* 429.) que dans ce cas on peut toujours conftruire la courbe.

2°. En comparant le terme $2a^{1-n}x^{n-1}dx$ avec $prx^{r-1}dx$ & $2aax^{-1}dx$ avec $\frac{-2fx^n dx}{\mathrm{f}a^{n+1}}.ppx^{2r}$, on trouve $n = \frac{1}{3}$ & $r = -\frac{5}{3}$; & $f:\mathrm{f}::$ 25 à 36. Or le rapport des forces f, f ne peut être un rapport fini que dans le cas où la viteffe de circulation eft fort petite (*art* 421.). Donc la courbe fera conftructible, fi $n = \frac{1}{3}$, fi la viteffe de circulation eft fort petite, & fi $f:\mathrm{f}::25:36$.

3°. En comparant le terme $2a^{1-n}x^{n-1}dx$ avec $-\frac{2fx^{n+2r}ppdx}{\mathrm{f}a^{n+1}}$, & $2aax^{-1}dx$ avec $prx^{r-1}dx$, on trouveroit $2r = -3$ & $r = -2$; ce qui eft impoffible.

4°. Les Geométres favent que fi on pouvoit réduire l'Equation dont il s'agit ici à n'avoir que trois termes, dont l'un contînt dt, l'autre tt avec x, & dx, l'autre enfin x & dx feulement, il y a des cas, où cette Equation, connue fous le nom d'Equation de *Ricati*, feroit conftructible.

Pour réduire à cette forme l'Equation dont il s'agit,

on fera d'abord $\frac{-4pf}{\mathrm{f}a^{n+1}} + s = 0$, & $n + r = -1$. On mettra pour r sa valeur $-1-n$ dans les exposans de x, & l'on fera ensuite $-2-n = -3$ & $\frac{-2ppf}{\mathrm{f}a^{n+1}} + pr + 2aa = 0$; ou bien $-2-n = n-3$, & $\frac{-2ppf}{\mathrm{f}a^{n+1}} + pr + 2a^{s-n} = 0$. Dans le premier cas, on aura $n = 1$, & on trouvera que l'Equation est constructible, si $8f = \mathrm{f}.(s[2+\frac{s}{2}])$, s étant égale à $\frac{-3-2m}{2}$, & m désignant un nombre entier positif. Dans le second cas, on aura $n = \frac{1}{2}$, & $s = \frac{2m-7}{4}$ & $16f = \mathrm{f}(s.[3+5])$, m désignant toujours un nombre entier positif.

Donc on pourra encore construire la courbe, si $\mathrm{n} = 1$ *& si* $\mathrm{n} = \frac{1}{2}$, *pourvû que la matiére du Tourbillon se meuve fort lentement, & que le rapport de* f *à* f *soit tel que le donnent les Equations précedentes.*

Des Orbites décrites par une Sphére dans un milieu qui résiste peu.

433. *Imaginons qu'une Sphére très-petite* A *se meuve dans un Tourbillon dont la matiére ne soit capable que d'une très-petite résistance, & que cette Sphére soit continuellement attirée vers le centre du Tourbillon par une force quelconque ; on propose de déterminer la courbe qu'elle doit décrire, en*

ſuppoſant que cette courbe diffère infiniment peu d'un Cercle.

Comme l'Orbite différe très-peu d'un Cercle (*hyp.*), & que la viteſſe tant du mobile que du Fluide peut être regardée comme conſtante à tous les points de l'Orbite, la réſiſtance pourra être auſſi regardée comme conſtante dans le ſens de l'Orbite, & comme nulle dans le ſens du rayon vecteur. Si on nomme p cette réſiſtance, x la diſtance d'un point quelconque de la courbe au centre du Tourbillon, p la perpendiculaire menée du centre ſur la tangente qui paſſe par ce point de la courbe; $\frac{f\Psi x}{\Psi a}$ la force centrale, & ds l'élément de la courbe, lequel doit être cenſé égal à l'élément du Cercle décrit du rayon a, (a étant la diſtance du centre du Tourbillon à un des points où la courbe eſt perpendiculaire à ſon rayon, & d'où l'on ſuppoſe que le Corps part avec une viteſſe $=g$), on aura

$$\frac{fdx\Psi x}{\Psi a} + pds = - mudu;$$

$$\& - 2fdx\Psi x : \Psi a \left(mgg - 2\int\frac{fdx\Psi x}{\Psi a} - 2ps\right) = - \frac{2dp}{p}.$$

Donc

$$L^{*}\left(\left[mgg - 2\int\frac{fdx\Psi x}{\Psi a}\right]\times aa.\left[aa + zz\right] : mggxxzz\right) = \int\frac{2ps.2fdx\Psi x}{m^{2}g^{4}}.$$

Soit $\Psi x = x^{n}$, $x = a - t$, $gg = \frac{2fb}{m}$, & $2b = a + e$,

* Cette lettre L ſignifie *Logarithme*.

(e & t

(e & t étant des quantités fort petites l'une & l'autre) $3 + n = \alpha$, $\frac{4p}{f} = \beta$, & l'on aura l'Equation suivante

$$\frac{dt}{\surd(2et - \alpha tt + \beta\int s\,dt)} = \frac{ds}{a};$$

en faisant $2et - \alpha tt + \beta\int s\,dt = rr$, & $dt = \frac{q\,dr}{a}$, on trouvera que $q = \pm \frac{ar}{\surd[(\beta ar - arr + A)]}$, A étant une constante ajoutée en intégrant : d'où l'on tirera

$$s = \frac{2at - 2e \pm 2\surd[\beta ar - arr + A]}{\beta}$$

Cette valeur de s doit être $= 0$, lorsqu'on a à la fois r & $t = 0$, d'où l'on tire $A = ee$. Pour avoir la valeur de t, on observera que rr ou sa valeur $2et - \alpha tt + \beta\int s\,dt$ doit être $= 0$ lorsque $t = 0$; & de plus, lorsque t est telle que $2et - \alpha tt + \beta\int s\,dt = 0$; qu'ainsi la valeur de dt qui est $\pm \frac{r\,dr}{\surd[\beta ar - arr + A]}$ doit être telle, que pour une même r on ait deux valeurs de t qui deviennent égales, lorsque r sera la plus grande qu'il sera possible, & qui soient telles, que l'une soit égale à zero lorsque $r = 0$.

Pour cela, on construira d'abord d'un rayon égal à $\surd[\frac{ee}{a} + \frac{\beta\beta aa}{4aa}]$, un Cercle sur lequel on prendra CO (Fig. 164) $= \frac{\beta a}{2a}$, puis on décrira la Cycloide accourcie AQS, qui soit telle, que AN soit à NS ::

$\sqrt{[\frac{ee}{a} + \frac{66aa}{4aa}]} : \frac{6a}{2a}$; je dis que pour une même valeur SD, r, les deux valeurs de t seront $\frac{Dq}{\sqrt{a}}$ & $\frac{DQ}{\sqrt{a}}$. La valeur de s sera NK ou NKZ multiplié par $\frac{2aa \, . \, \sqrt{a}}{\sqrt{[4aee + 66aa]}}$.

COROLLAIRE I.

434. De-là il s'ensuit, que si $e = 0$ & $a = 1$ la distance d'une apside à l'autre est de 360 degrés, c'est-à-dire que *si la force centrale est en raison inverse du quarré de la distance, & que l'Orbe décrite dans le vuide soit un Cercle, l'Orbite décrite dans un milieu peu résistant aura ses deux apsides distantes l'une de l'autre de 360 degrés.*

COROL. II.

435. En général, la distance d'une apside à l'autre est égale à l'angle NKM divisé par $\sqrt{a}$.

REMARQUE.

436. Il ne seroit pas plus difficile de déterminer le mouvement des apsides, dans le cas où les densités des couches seroient comme une fonction quelconque des rayons.

Soit Ψx cette fonction, & $dx \Delta x$ la différence, il faudra seulement au lieu de u, mettre $\frac{a \Delta a}{\Psi a}$, & tout le reste demeurera le même que ci-dessus.

Du mouvement d'un Corps dans un Tourbillon non circulaire.

437. Quoique j'aie fait voir ci-dessus qu'un pareil Tourbillon étoit impossible, cependant il ne sera pas inutile de remarquer que quand on le supposeroit possible, un Corps qui y seroit plongé ne pourroit suivre le mouvement des différentes couches de ce Tourbillon, comme le supposent ceux des Cartesiens qui substituent des Tourbillons elliptiques aux Tourbillons circulaires. Car soit x un Arc quelconque d'une couche dans laquelle on suppose que le Corps se trouve, X la vitesse de la couche au point où est le Corps, u la vitesse du Corps, on aura (*article* 246.) $udu = (X - u)^2 dx$. D'où l'on voit qu'on ne sauroit supposer $u = X$. Donc &c.



ADDITIONS.

I.

Pour l'article 110.

J'AI expofé dans cet article les raifons qui prouvent que toutes les tranches du Fluide confervent leur parallélifme lorfqu'elles fe meuvent, & qu'on peut regarder tous les points d'une même tranche, comme ayant une égale viteffe dans le fens vertical. Il ne fera peut-être pas inutile d'ajouter ici une confidération nouvelle, qui fervira à fortifier les raifons expofées dans l'article que je viens de citer.

Soit CD (Fig. 165) la furface du Fluide dans l'inftant qu'il commence à fe mouvoir, en vertu de fa pefanteur. Toutes les particules A, a, &c. de cette furface tendent à fe mouvoir dans ce premier inftant en vertu de leurs pefanteurs, avec des viteffes égales repréfentées par les lignes verticales parallèles, égales, & infiniment petites AG, ag; mais comme les parois du vafe empêchent que toutes les parties A, a, &c. de la furface, ne puiffent fe mouvoir verticalement, il faut regarder les viteffes AG, ag, des points A, a, comme compofées de deux autres viteffes, favoir des viteffes AE, ae, avec lefquelles ils meuvent réellement, & des viteffes AF, af qui font détruites. Or décompofant ces viteffes AF,

af, chacune en deux autres *Ao*, *oF*, & *am*, *mf*, il eſt clair, que puiſque la ſurface *CD* eſt plane, & que les directions *AF*, *af* ſont obliques à cette ſurface, il eſt néceſſaire pour qu'il y ait équilibre. 1°. Que les forces ſuivant *oF*, *mf*, ſoient détruites & anéanties par quelque force inhérente aux particules du Fluide. 2°. Que les forces ſuivant *Ao*, *am*, ſoient égales entr'elles (*art.* 36.); d'où il s'enſuit que les lignes *oG*, *mg*, ou leurs égales *Ai*, *an* ſeront égales, & qu'ainſi la viteſſe de tous les points *A*, *a*, &c. de la ſurface ſera la même dans le ſens vertical.

Il eſt donc démontré que la ſurface *CD* doit au premier inſtant demeurer horizontale. On prouvera par un raiſonnement ſemblable, qu'elle doit demeurer horizontale dans les inſtans ſuivans. Car le raiſonnement précedent auroit encore lieu, ſi on ſuppoſoit que les particules *A*, *a* euſſent déja des viteſſes, qui, eſtimées dans le ſens vertical, fuſſent égales entr'elles, & qui duſſent être altérées l'inſtant ſuivant par l'effort de leur peſanteur ſuivant *AG*, *ag*; ainſi dès que les particules de la ſurface *CD*, ont eu dans un même inſtant des viteſſes égales dans le ſens vertical, leurs viteſſes dans ce même ſens doivent être égales dans tous les inſtans ſuivans. Donc &c.

Or de ce que la ſurface *CD* conſerve continuellement la ſituation horizontale, on eſt en droit de conclure que les autres tranches horizontales du Fluide conſervent auſſi leur paralléliſme. Car d'un côté il ne paroît pas poſſible que le Fluide formât une maſſe continue, ſi la pre-

miére tranche conſervoit la ſituation horizontale, ſans qu'il en fût de même de toutes les tranches ; de plus, la force inhérente aux particules du Fluide, & qui anéantit, comme nous avons vû, les forces ſuivant *oF*, *mf*, &c. doit agir de même dans l'intérieur du Fluide, deſorte que dans l'eſtimation des viteſſes détruites à chaque inſtant dans les différentes particules, il ne faudra avoir égard qu'à la partie de ces viteſſes eſtimées dans le ſens vertical. Or cela poſé, il eſt certain (*article* 36.) que cette partie devroit être la même dans tous les points d'une même tranche. Donc la viteſſe de tous ces points doit être la même dans le ſens vertical.

S'il y a des cas où la ſurface du Fluide ne demeure pas horizontale (ce qui n'arrive même que quand cette ſurface eſt fort proche de l'ouverture par laquelle l'eau s'écoule) cette irrégularité ne paroît pas devoir être attribuée à une autre cauſe qu'à l'adhérence du Fluide aux parois du vaſe, adhérence dont nous faiſons abſtraction ici.

Comme nous n'avons conſidéré dans chaque tranche que la viteſſe dans le ſens vertical, il eſt conſtant que la conſervation des forces vives, telle que nous l'avons démontrée, n'a lieu qu'improprement dans les Fluides. Nous avons déja fait dans l'*article* 117. une Remarque analogue à celle-ci.

II.

Pour le mouvement des Fluides élaſtiques.

Dans le Chapitre où nous avons traité cette matiére, nous avons ſuppoſé que les Fluides élaſtiques étoient toujours d'une denſité uniforme dans toutes leurs parties. Cette ſuppoſition n'eſt exactement vraye, que quand les parties du Fluide ſont imaginées ſans peſanteur, & qu'une même force les comprime. Elle eſt même peu éloignée du vrai, lorſqu'il s'agit de déterminer le mouvement d'une maſſe d'air qui ſort d'un vaſe, parce que la peſanteur de cette maſſe, ne ſauroit, à moins qu'elle ne ſoit très-grande, en comprimer ſenſiblement les particules, & que le mouvement qui réſulte du reſſort de l'air eſt cenſé beaucoup plus grand que celui qui réſulte de ſa peſanteur. Néanmoins ſi l'on vouloit appliquer notre Méthode à la recherche du mouvement d'un Fluide élaſtique dont les parties ſeroient différemment comprimées, rien ne ſeroit plus facile.

Suppoſons d'abord dans le cas de l'*art.* 193. que toutes les parties du Fluide $DCPL$ (Figure 65) ſoient inégalement comprimées, & imaginons le partagé en une infinité de petites tranches horizontales égales en maſſe, dont y ſoit la largeur, dx la hauteur & z la denſité, il eſt conſtant que la force dilatatrice de chaque tranche pourra être exprimée par une fonction Z de ſa denſité z, & que chaque tranche ſe dilatera à chaque inſtant d'une quantité proportionnelle à cette force. Donc ſi on nom-

me M la masse entiére du Fluide, δ la densité de sa tranche inférieure, & Δ la force qui la comprime, l'accroissement de volume d'une portion quelconque $\int yzdx$ sera proportionnelle à $\int yzZdx$, & comme Kdq exprime l'augmentation de volume de la masse totale à chaque instant, il s'ensuit que $\frac{Kdq \times \int yzZdx}{Q}$ sera l'accroissement en volume de la masse $\int yzdx$, (Q étant ce que devient $\int yzZdx$, lorsque $x = AB$). De-là il est évident que la vitesse v de chaque tranche sera en raison de $\frac{\int yzZdx}{y}$, & pour avoir le mouvement du Fluide, il faudra faire

$$\int Z\,dx - \int \frac{zdxdv}{dt} = 0.$$

ce qui n'est plus qu'une question de calcul.

On remarquera de plus, que si on nomme α la quantité dont la tranche inférieure du Fluide se dilate, $\frac{\alpha \cdot yzZdx}{\Delta \cdot K\delta dq}$ sera la quantité dont se dilate la tranche $yzdx$; que par conséquent $\alpha = \frac{KK\delta\Delta dq^2}{Q}$, qu'ainsi, appellant dz la diminution de densité du Fluide contenu dans la masse $yzdx$, on aura $-\frac{dz}{z} = \frac{Kdq \cdot Z}{Q}$. On a de plus (en supposant la constante $K\delta dq = dp$) $dt = \frac{dq}{u} = -\frac{dp}{K\delta u}$. Toutes ces Equations combinées serviront à déterminer la quantité de

Fluide qui reste dans le vase après un tems donné, & la densité des différentes parties de cette masse de Fluide : le Problême est donc réduit comme l'on voit, à une pure question d'Analyse.

Si on avoit égard à la pesanteur du Fluide, il faudroit examiner d'abord quel devroit être à chaque instant le changement de vitesses des différentes tranches, eu égard à leur pesanteur seule, & abstraction faite de leur ressort, & examiner ensuite le mouvement de ces mêmes tranches eu égard à leur ressort seul, & abstraction faite de leur pesanteur. La combinaison de ces deux mouvemens donneroit le mouvement réel du Fluide à chaque instant, en employant la même Méthode que dans les *art.* 216 *&* 217. Il faudroit aussi se servir de cette même Méthode pour déterminer le mouvement du Fluide, si dans ces mêmes hypotheses il se dilatoit vers deux côtés à la fois.

III.

Pour l'article 241.

Si on supposoit qu'une partie seulement des Globules du Fluide fut rangée autour du Corps *BAC* (Fig. 74) de la maniére qui est expliquée dans cet *article* 241, & que l'autre partie de ces mêmes Globules fut rangée de la maniére expliquée *article* 232, on trouveroit encore les mêmes formules : d'où il s'ensuit qu'en général l'action du Fluide sur un Arc quelconque de la courbe *BAC*

eſt la même, ſoit que les Globules ſoient diſpoſés ſur cet Arc comme dans l'*article* 241, ſoit qu'ils ſoient diſpoſés comme dans l'*art.* 232. On peut donc conclure de-là, que la réſiſtance du Fluide eſt toujours la même, toutes choſes d'ailleurs égales, quelque arrangement qu'on ſuppoſe dans ſes parties.

F I N.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 11, ligne 8, H, lif. Q

Pag. 73, lig. 16, $\int \zeta dx$, lif. $GH^2 \int \frac{\zeta dx}{y}$.

Pag. 115, lig. 17, $KKmdq$. lif. $KKmuudq$

Ibid. lig. 19, $+(m+\mathrm{m})$, lif. $(m+\mathrm{m})+$

Pag. 166, lig. 20, $(\frac{\int y dx}{2yy})^2$, lif. $\frac{(\int y dx)^2}{2yy}$

Pag. 176, lig. 14, $\Delta[\varphi . dt . BS]$, lif. $\Delta[F . dt . BS]$

Pag. 193, lig. 10 & 12, $2A$, lif. $4A$

Pag. 194, *lig.* 12, d'une de ces boules, *lif.* d'un de ces Cercles

Pag. 216, lig. 6, φdy^3, lif. φdy^2

Pag. 225, lig. 1, $2dx$, lif. dx

Ibid. lig. 3, dx, lif. $2dx$

Pag. 297, *lig.* 16, même en raifon, *lif.* en même raifon.

Pag. 299, *lig.* 16 *& fuiv.* au lieu de $n > 1$ *lif.* $n < 1$, & au lieu de $n < 1$ *lif.* $n > 1$

Pag. 332, lig. 10, $+tt$, lif. $-tt$

Pag. 434, lig. 23, $n < 2$, lif. $n > 2$

Pag. 437, lig. 12, $(2et - tt)^{\frac{3}{2}}$, lif. $(2et - tt)^{\frac{1}{2}}$.

Ibid. lig. 14 & 15, au lieu de e, lif. $2e$.

Pag. 402, lig. 3, $2Bnds -$, lif. $2Bnds +$

Pag. 443, *lig.* 13, la plus grande, *lif.* la plus petite

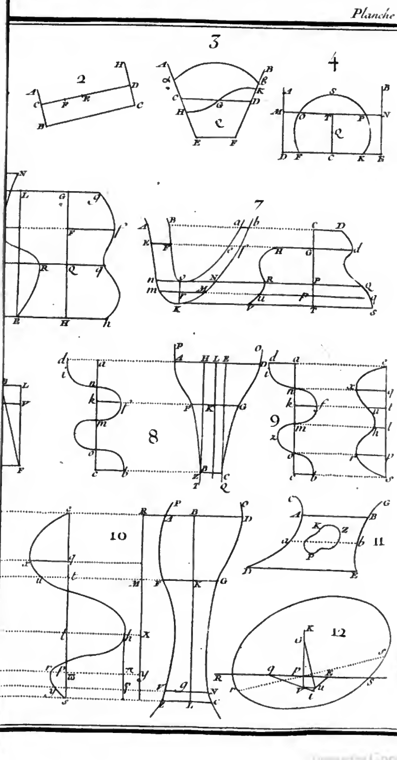
Pag. 448, *lig.* 17 *& fuiv.* au lieu de pds & ps, *lif.* pds & ps.

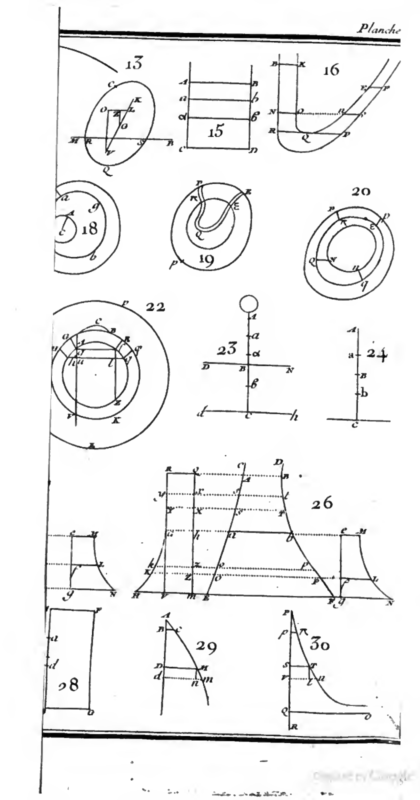
Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences, du 28. Mars 1744.

MEſſieurs DE MAUPERTUIS & l'Abbé DE GUA ayant été nommés pour examiner un Ouvrage de M. D'ALEMBERT, intitulé : *Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides*, & en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 29. Mars 1744.

GRAND-JEAN DE FOUCHY, *Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

DE L'IMPRIMERIE DE JEAN-BAPTISTE COIGNARD,
IMPRIMEUR DU ROI.


Planche
2
3
4
7
8
9
10
11
12


13
15
16
18
19
20
22
23
24
26
28
29
30

32

33

35

36

39

38

41

42

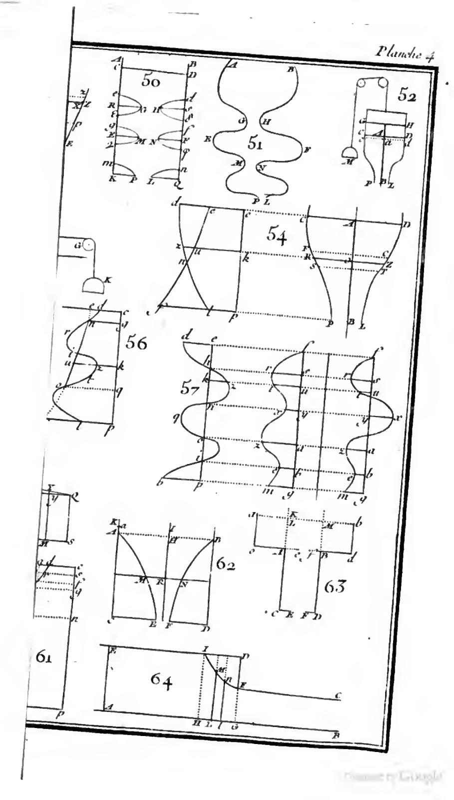
40

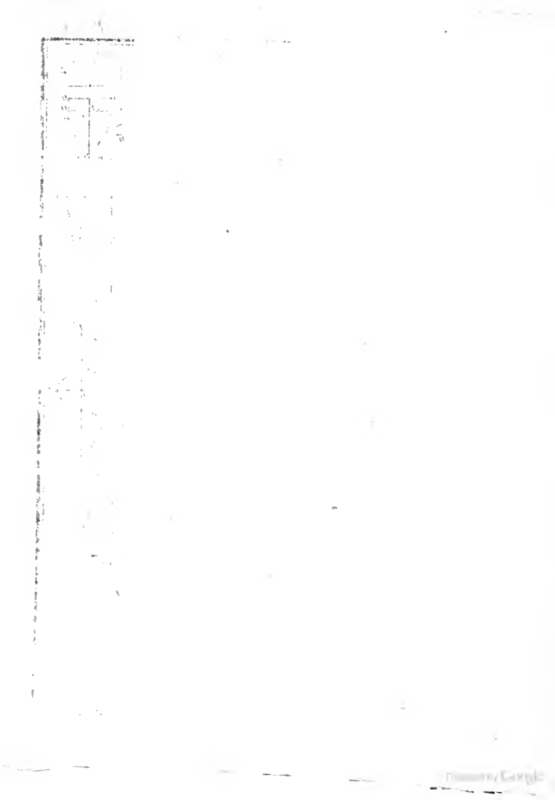
43

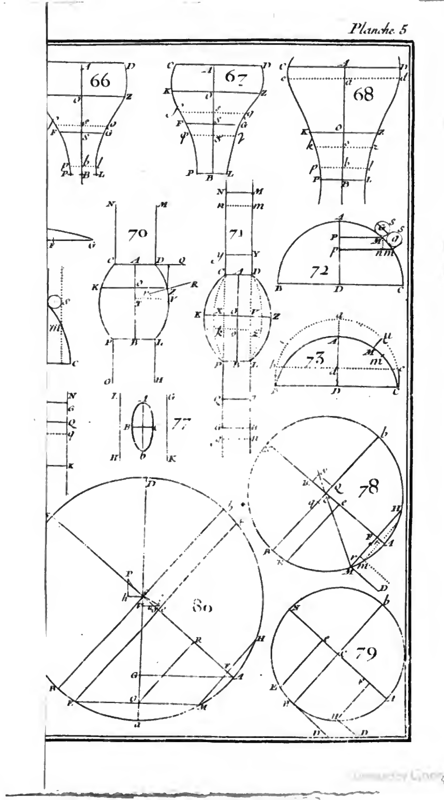
46

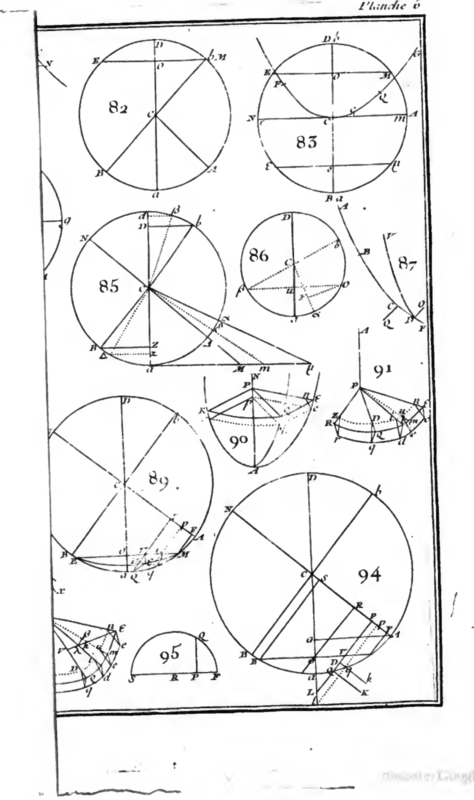
47

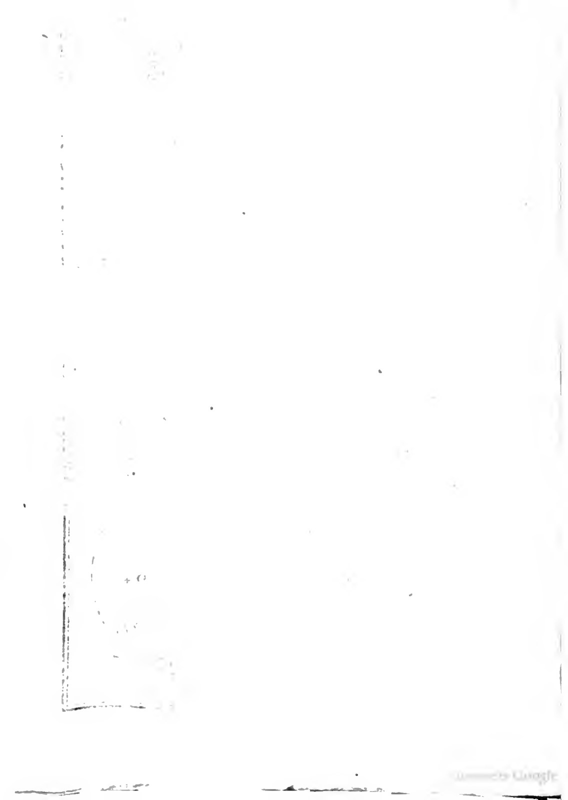
48

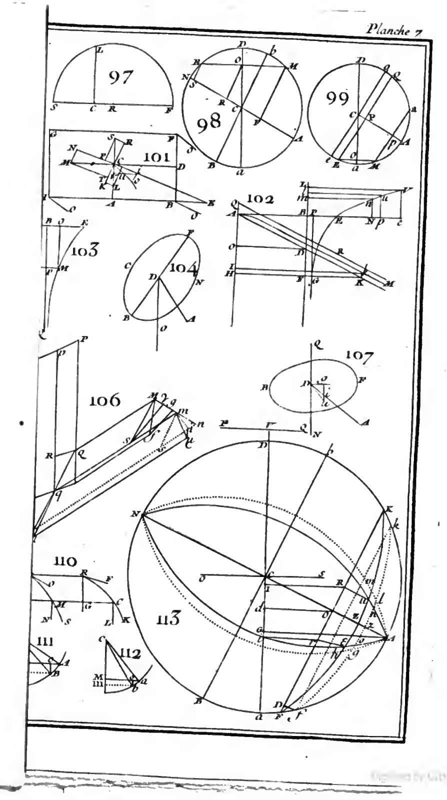

50
51
52
54
56
57
61
62
63
64

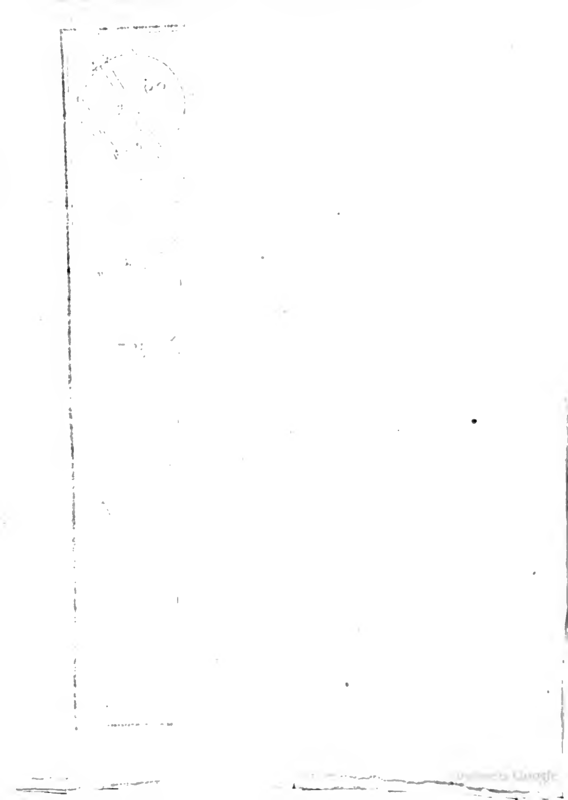


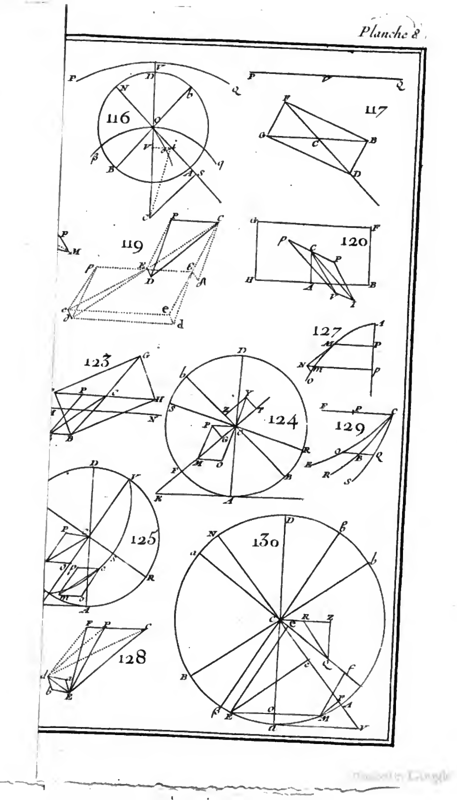

66
67
68
70
71
72
73
77
78
79
80

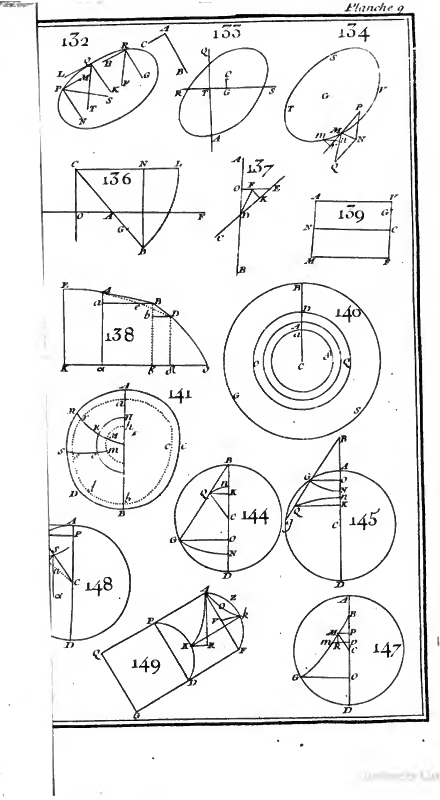

82
83
85
86
87
89
90
91
94
95

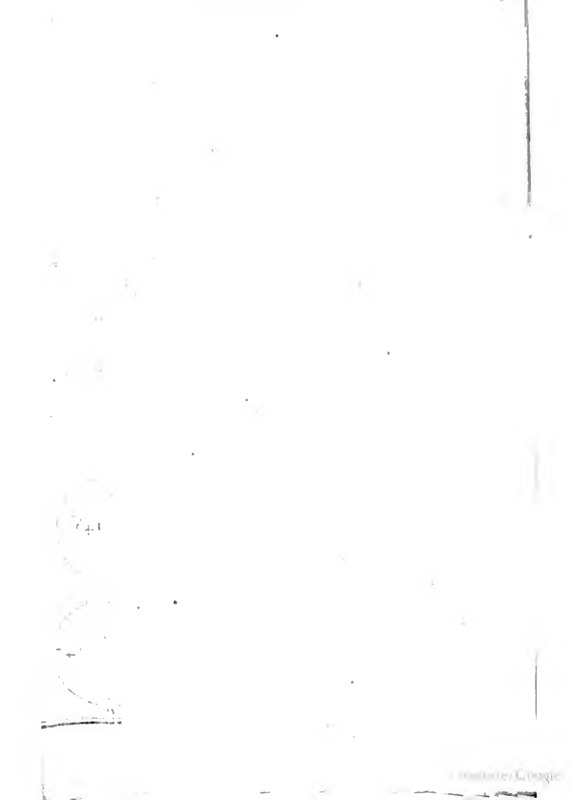



97
98
99
101
102
103
104
106
107
110
111
112
113

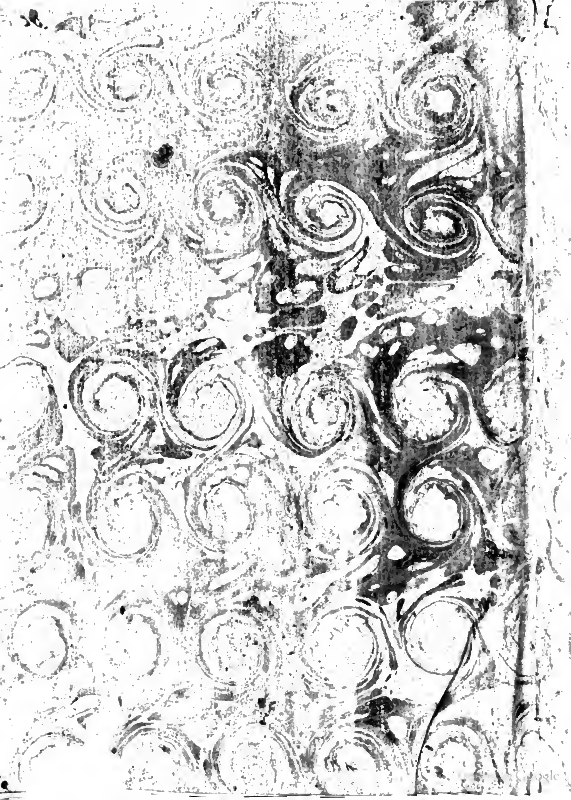


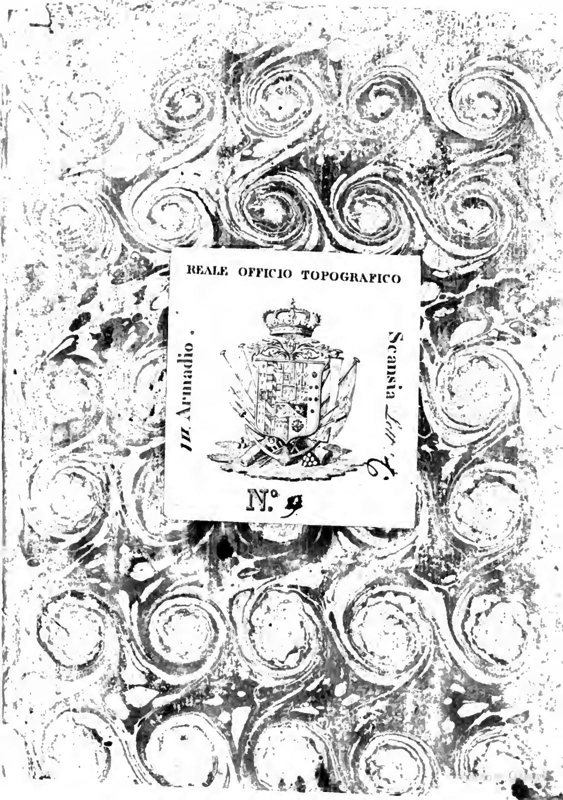

116
117
119
120
123
124
125
127
128
129
130


132
133
134
136
137
139
138
140
141
144
145
148
149
147



151 154 156 153 155 157 159 160 163 162 165 164




REALE OFFICIO TOPOGRAFICO
III Armadio .
Scansia
N.°

